ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2026

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΕΠΑΛ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x, τότε $f'\left(x_0\right)=-1$.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

γ) Αν για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, υπάρχουν x_1, $x_2\in A$ με $x_1<x_2$ για τα οποία ισχύει $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 3}2=3$.

ε) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f,g ισχύει η ισότητα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{f\left(x_0\right)}{g\left(x_0\right)}$.

(Μονάδες 10)

Α4. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)'=\ldots\ldots\ldots$, όπου f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

β) $\left(\dfrac{5}{x}\right)'=\ldots\ldots\ldots,\ x\neq 0$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3}-2\alpha x^2+4x$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$.

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

(Μονάδες 6)

Β2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{x^2-4}$.

(Μονάδες 6)

Β3. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της f, ως προς x, όταν $x=3$.

(Μονάδες 6)

Β4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x+1}{x-1}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2,-3)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι $\alpha=-2$.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $A\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$ και $B\left(3,-\frac{5}{2}\right)$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 7)

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
Δάφνη - Αγ. Δημήτριος

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-\alpha x$, με $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)$, με $x\geq 0$, όπου α μη αρνητική σταθερά.

Δ1. Αν οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία τους με τετμημένη $x_0=1$ είναι κάθετες, τότε να δείξετε ότι $\alpha=3$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+2026$.

(Μονάδες 7)

Δ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x>0$ για το οποίο ο ρυθμός μεταβολής της g, ως προς x, είναι αρνητικός.

(Μονάδες 6)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
Δάφνη - Άγ. Δημήτριος