ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2026

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α3. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ

Α4. α) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ **β)** $\left(\frac{5}{x}\right)'=-\frac{5}{x^2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^2-4\alpha x+4$.

Ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1\Leftrightarrow f'(1)=1\Leftrightarrow 1-4\alpha+4=1\Leftrightarrow 4\alpha=4\Leftrightarrow \alpha=1$.

Άρα $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x$ και $f'(x)=x^2-4x+4$.

Β2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=0$.

Β3. $f'(3)=3^2-4\cdot 3+4=9-12+4=1$.

Β4. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M\left(3,f(3)\right)$. Έχει κλίση $\lambda=f'(3)=1$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y=x+\beta$. Διέρχεται από το σημείο $M\left(3,f(3)\right)$ επομένως για $x=3$ και $y=f(3)=3$ προκύπτει $\beta=0$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=x$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η f ορίζεται όταν $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Γ2. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2,-3)$ ισχύει

$f(2)=-3\Leftrightarrow \frac{2a+1}{2-1}=-3\Leftrightarrow 2\alpha+1=-3\Leftrightarrow 2\alpha=-4\Leftrightarrow \alpha=-2$.

Άρα $f(x)=\frac{-2x+1}{x-1}$, $x\neq 1$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{-2x+1}{x-1}\right)'=\frac{-2(x-1)-(-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2x+2+2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ισχύει ότι $f'(-1)=f'(3)=\frac{1}{4}$, άρα οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της με τετμημένες $x_1=-1$ και $x_2=3$ είναι παράλληλες.

Γ4. $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow 1=0$, αδύνατη, άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλη με τον άξονα x'x.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-\alpha$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Αφού οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία τους με τετμημένη $x_0=1$ είναι κάθετες, θα ισχύει

$f'(1)\cdot g'(1)=-1\Leftrightarrow (2-\alpha)\cdot 1=-1\Leftrightarrow 2-\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=3$.

Άρα $f(x)=x^2-3x$ και $g(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)$.

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δ2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\left(x^2-3x\right)}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}x\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$.

Δ3. $f'(x)=3 \Leftrightarrow 2x-3=3 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$.

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M\left(3,f\left(3\right)\right)$. Έχει κλίση $\lambda=f'(3)=3$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y=3x+\beta$. Διέρχεται από το σημείο $M\left(3,f\left(3\right)\right)$ επομένως για $x=3$ και $y=f\left(3\right)=0$ προκύπτει $\beta=-9$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=3x-9$.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$, για κάθε $x>0$. Άρα δεν υπάρχει $x>0$ τέτοιο ώστε ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης g, ως προς x, να είναι αρνητικός.

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
Δάφνη - Άγ. Δημήτριος