

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ ΙΩΑΝΝΑ - ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ****ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
Μονάδες 6
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
Μονάδες 5
- A3.** Πότε μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;
Μονάδες 4
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Για κάθε συνάρτηση f που παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο x_0 ισχύει $f'(x_0) = 0$.
- β)** Κάθε συνάρτηση f η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, δεν είναι και συνεχής στο x_0 .
- γ)** Αν F είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $\lambda \cdot F$ είναι μία παράγουσα της $\lambda \cdot f$ στο Δ .
- δ)** Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- ε)** Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα σύνολο A και δε μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο A .

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β**Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x > 1$.

- B1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

- B2.** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες και τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 6

- B3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} (f(x) \ln^2 x) dx$.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-a} - \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Γ1. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 2026$, να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Για $a = 1$:

Γ2. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\sqrt{x}e^{x-1} - 1 = 0$, έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ΕΛΑΧΙΣΤΟ. (Μονάδες 5)

Μονάδες 10

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $2e^{x-1} - 2\sqrt{x} \geq x - 1$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$ με $F(e) = 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F , τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

Δ3. i) Να δείξετε ότι $x \cdot f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 2)

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$. (Μονάδες 5)

Μονάδες 7

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^{11}) - \ln x = f(x)$.

Μονάδες 6

Σας ευχόμαστε επιτυχία!