

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ ΙΩΑΝΝΑ – ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σελ. 111 σχολ. βιβλίου.
 A2. Σελ. 128 σχολ. βιβλίου.
 A3. Σελ. 141 σχολ. βιβλίου.
 A4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και συνεχής με $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Για $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow \ln^2 x > 0$. Επιπλέον $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$. Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο παρακάτω:

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

f : ↘ στο $(1, e]$ και ↗ στο $[e, +\infty)$.

Η f καθότι συνεχής στο $x = e$ και λόγω της μονοτονίας της, παρουσιάζει στο $x = e$ ΕΛΑΧΙΣΤΟ το $f(e) = e$.

B2. • $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$,

γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0$ και $\ln x > 0$ για κάθε $x > 1$.

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

B3. Η $f(x) \ln^2 x = x \ln x$ είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως γινόμενο συνεχών.

$$\int_e^{e^2} (f(x) \ln^2 x) dx = \int_e^{e^2} x \ln x dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = e^4 - \frac{e^2}{2} - \int_e^{e^2} \frac{x}{2} dx =$$

$$e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_e^{e^2} = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{3e^4 - e^2}{4}.$$

$$\mathbf{B4.} \left| \frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |\eta\mu f(x)| \leq \frac{1}{|f(x)|} \text{ οπότε } -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \leq \frac{1}{|f(x)|}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\text{οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right) = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $f'(x) = e^{x-a} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$. Εφόσον η εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη 1 είναι

παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 2026$, ισχύει ότι:

$$f'(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{1-a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{1-a} = 1 \Leftrightarrow 1-a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a=1}.$$

Γ2. α) Θέτουμε $g(x) = 2\sqrt{x}e^{x-1} - 1$.

• Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και ισχύει ότι $g(0) \cdot g(1) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$,

οπότε σύμφωνα με το Θ. BOLZANO, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

• Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{x-1} + 2\sqrt{x}e^{x-1} = e^{x-1} \cdot \frac{1+2x}{\sqrt{x}} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g είναι \nearrow στο $[0, +\infty)$ και η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

β) Για $a = 1$ η συνάρτηση f γίνεται: $f(x) = e^{x-1} - \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

$$\text{Από το Γ1. έχουμε: } f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}e^{x-1} - 1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Επειδή $2\sqrt{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, το πρόσημο της f' εξαρτάται από τον αριθμητή, που βλέπουμε ότι είναι η συνάρτηση $g(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος που μηδενίζεται στο x_0 και είναι γνησίως αύξουσα, οπότε :

$$\text{για } x < x_0 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_0) \Rightarrow g(x) < 0, \text{ άρα και } f'(x) < 0.$$

$$\text{για } x > x_0 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_0) \Rightarrow g(x) > 0, \text{ άρα και } f'(x) > 0.$$

Πίνακας μονοτονίας της f :

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	—		+
$f(x)$	\searrow	\circ	\nearrow

f : \searrow στο $[0, x_0]$ και \nearrow στο $[x_0, +\infty)$, είναι συνεχής στο x_0 , οπότε παρουσιάζει σ' αυτό ΕΛΑΧΙΣΤΟ.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $f''(x) = (e^{x-1})' - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = e^{x-1} - \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = e^{x-1} + \frac{1}{4x\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα $f : \cup$ στο $[0, +\infty)$.

Γ4. $2e^{x-1} - 2\sqrt{x} \geq x-1 \Leftrightarrow e^{x-1} - \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ [1]

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Αφού λοιπόν η f είναι κυρτή, οι τιμές της είναι «πάνω» από αυτές της εφαπτομένης, άρα ισχύει η [1].

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • Η f είναι συνεχής στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι συνεχής και στο $x=1$ γιατί: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{DLH} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$.

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1) \cup (1, +\infty), \text{ γιατί:}$$

Θέτω $g(x) = x-1-x \ln x$, $x > 0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων

συναρτήσεων, με $g'(x) = 1 - 0 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$$

	0	1	+∞
g'	+	-	
g	↗	↘	

O.M.

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1, ίσο με $g(1) = 0$. Οπότε

$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, με το “=” να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

• Το σύνολο τιμών της f είναι: $f((0, +\infty)) \stackrel{f: \searrow}{f: \text{συν.}} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty)$, γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{DLH} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\Omega) = \int_1^e |F(x)| dx$.

Η F είναι παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$ δηλ. $F'(x) = f(x) > 0 \stackrel{F:συν.}{\Rightarrow} F \uparrow$ στο $[1, e]$.

Άρα $1 \leq x \leq e \stackrel{F \uparrow}{\Rightarrow} F(x) \leq F(e) \stackrel{(r)}{=} 0 \Leftrightarrow F(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_1^e (-F(x)) dx = -\int_1^e F(x) dx = -\int_1^e (x-1)' F(x) dx = \\ &= -\left[(x-1)F(x) \right]_1^e + \int_1^e (x-1)F'(x) dx = -\left((e-1)F(e) - 0 \cdot F(1) \right) + \int_1^e (x-1)F'(x) dx \stackrel{(F(e)=0)}{=} \\ &= \int_1^e (x-1)f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Αν } x \neq 1 \Rightarrow (x-1)f(x) = (x-1) \frac{\ln x}{x-1} = \ln x.$$

$$\text{Αν } x = 1 \Rightarrow (x-1)f(x) = (x-1) \cdot 0 = 0 = \ln 1.$$

Οπότε για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει: $(x-1)f(x) = \ln x$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - [x]_1^e = \\ &= e - (e-1) = e - e + 1 = 1 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Δ3. i) Για $x = 1$ προφανώς αληθεύει.

$$\text{Για } 0 < x \neq 1: f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{\ln 1 - \ln x}{\frac{1-x}{x}} = \frac{-x \ln x}{1-x} = x \frac{\ln x}{x-1} = x \cdot f(x).$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right] &\stackrel{i)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot x \cdot f(x) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f^2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln^2 x}{(x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{2(x-1)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Δ4. $f(x^{11}) - \ln x = f(x)$.

Παρατηρώ ότι το $x=1$ είναι προφανής ρίζα γιατί: $f(1^{11}) - \ln 1 = f(1) \Leftrightarrow f(1) = f(1)$.

- Για $x > 1 \Rightarrow x^{11} > x \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x^{11}) < f(x) \left. \begin{array}{l} \ln x > 0 \Rightarrow -\ln x < 0 \\ \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(x^{11}) - \ln x < f(x)$
- Για $0 < x < 1 \Rightarrow x^{11} < x \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x^{11}) > f(x) \left. \begin{array}{l} \ln x < 0 \Rightarrow -\ln x > 0 \\ \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(x^{11}) - \ln x > f(x)$

Άρα το $x=1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.