ΣΑΒΒΑΤΟ 18 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΔΗΜΟΥΛΕΑΣ ΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 83

Α2.

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

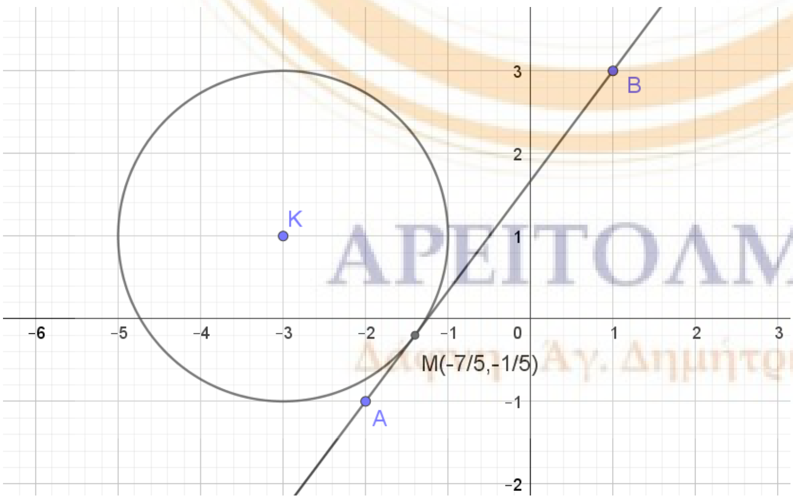
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

α) Είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{|4(-3)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

β) Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=d(\mathrm{K},\varepsilon)=2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,-1)$ και $\mathrm{B}(1,3)$, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + λx + λy + λ - 1 = 0$ (1), $λ \in R$, για την οποία:

$A = λ$, $B = λ$ και $Γ = λ – 1$, οπότε $A^2 + B^2 – 4Γ = λ^2 + λ^2 -4(λ – 1) = 2 λ^2 – 4λ + 4 =$

$2(λ^2 - 2λ + 2) > 0$ για κάθε $λ \in R$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $Δ = -4 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $λ \in R$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του $λ \in R$ είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{λ}{2}, -\frac{λ}{2})$ και η

$ρ = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ} = \frac{1}{2}\sqrt{2(λ^2 - 2λ + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{λ^2 - 2λ + 2}$ αντίστοιχα.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$, θα πρέπει $d(K, ε) = ρ$ (2).

Είναι: $d(K, ε) = \frac{|-\frac{λ}{2}-\frac{λ}{2}+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-λ+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2-λ|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|2-λ|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{λ^2 - 2λ + 2} \Leftrightarrow |2 - λ| = \sqrt{λ^2 - 2λ + 2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$|2 - λ|^2 = \sqrt{λ^2 - 2λ + 2}^{\,2} \Leftrightarrow (2 – λ)^2 = λ^2 - 2λ + 2 \Leftrightarrow 4 -4λ + λ^2 = λ^2 - 2λ + 2 \Leftrightarrow$

$2λ = 2 \Leftrightarrow λ = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για $λ = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην (ε) είναι το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

και ακτίνα η $ρ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $λ = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $ρ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες ζ: $y – y_M = κ(x – x_M)$ με $κ \in R$ ή

ζ: $y + \frac{1}{2} = κ(x + \frac{3}{2})$ ή ζ: $2κx - 2y + 3κ – 1 = 0$ με $κ \in R$.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου C $\Leftrightarrow d(K, ζ) = ρ \Leftrightarrow d(K, ζ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Όμως $d(K, ζ) = \frac{|2κ(-\frac{1}{2})-2(-\frac{1}{2})+3κ-1|}{\sqrt{(2κ)^2+(-2)^2}} = \frac{|-κ+1+3κ-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|2κ|}{\sqrt{4κ^2+4}} = \frac{2|κ|}{2\sqrt{κ^2+1}} = \frac{|κ|}{\sqrt{κ^2+1}}$,

οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\kappa^2 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1$ ή $\kappa = 1$ οι λύσεις, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για $\kappa = 1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_1: $2x - 2y + 2 = 0$ ή ζ_1: $x - y + 1 = 0$.

Για $\kappa = -1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_2: $-2x - 2y - 4 = 0$

ή ζ_2: $x + y + 2 = 0$. Οι ζ_1, ζ_2 είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο Μ. Παρατηρούμε ότι η ζ_2 είναι η ευθεία ε που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο Μ ανήκει στην ε (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $\mathrm{K}(2,-3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon) = \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} = \rho$ και αφού $d(K,\varepsilon) > \rho$ ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta = -2$. Έτσι $(\eta): y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$$d(K,\eta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot(-3) - \beta|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta| = 5 \Leftrightarrow$$

$$1 - \beta = 5 \quad ή \quad 1 - \beta = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = -4 \quad ή \quad \beta = 6$$

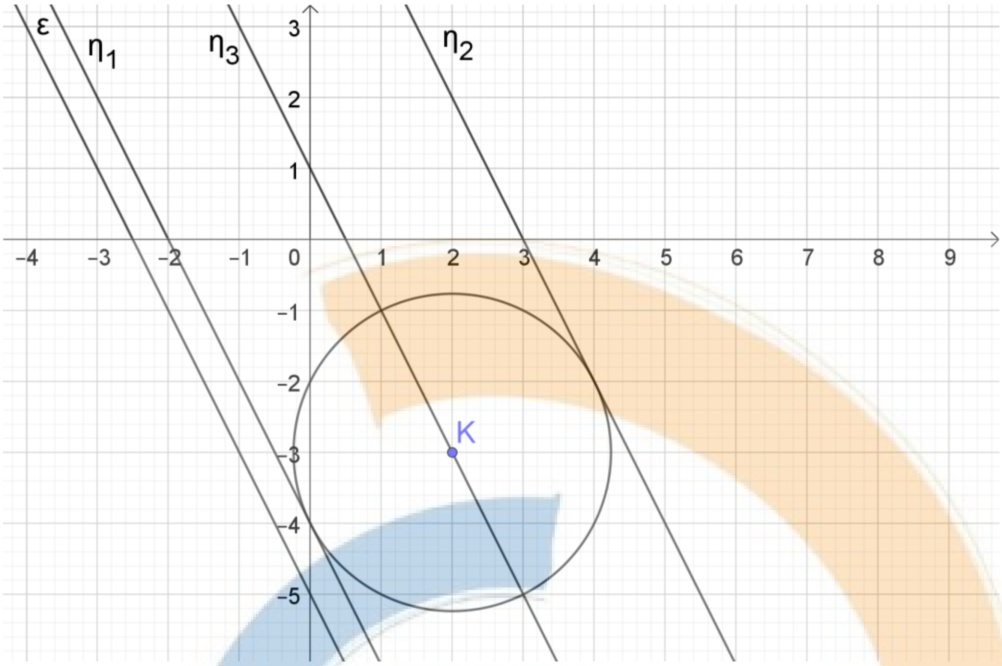
Συνεπώς έχουμε δύο εφαπτομένες τις $\eta_1 : 2x + y + 4 = 0$ και $\eta_2 : 2x + y - 6 = 0$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

δ) Είναι $d(K,\eta_1) = d(K,\eta_2) = \rho$ δηλαδή το $\mathrm{K}(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη (η_3) ως παράλληλη στις $(\eta_1),(\eta_2)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\eta_3} = -2$.

Τελικά η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η $(\eta_3): y + 3 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
Δάφνη - Άγ. Δημήτριος



ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
Δάφνη - Άγ. Δημήτριος