ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΡΤΙΟΥ 2026

**<u>ΤΑΞΗ:</u>** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
**<u>ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:</u>** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ - ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

## Θέμα Α

**Α1.** Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών:
«Έστω μια συνάρτηση $f$, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:
- η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό $\eta$ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.»

Μονάδες 7

**Α2.** Διατυπώστε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

**Α3.** Έστω συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η $f$ είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

**Α4.** Να μεταφέρετε <u>στο τετράδιο απαντήσεων</u> το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη «Σωστό», εάν θεωρείτε την πρόταση σωστή, ή τη λέξη «Λάθος», εάν τη θεωρείτε λανθασμένη.

**α.** Αν οι $f', g'$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\beta^\alpha f'(x)g(x)\,dx.$$

**β.** Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης $f$ που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα [α, β] είναι ολικό μέγιστο της $f$.

**γ.** Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης $f$ σε ένα διάστημα Δ είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της $f$.

**δ.** Αν για οποιαδήποτε συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$.

**ε.** Αν για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = 0$, τότε η γραφική παράσταση της $f$ έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x′x.

Μονάδες 10

## Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g$ με τύπους $f(x) = (1-x)e^x, x \in R$ και $g(x) = ln\,x\,, x > 0$.

Β1. Να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ f$.

Μονάδες 5

Αν $(g \circ f)(x) = \varphi(x) = ln(1-x) + x, με\ x < 1$

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $C_\varphi$ στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι:

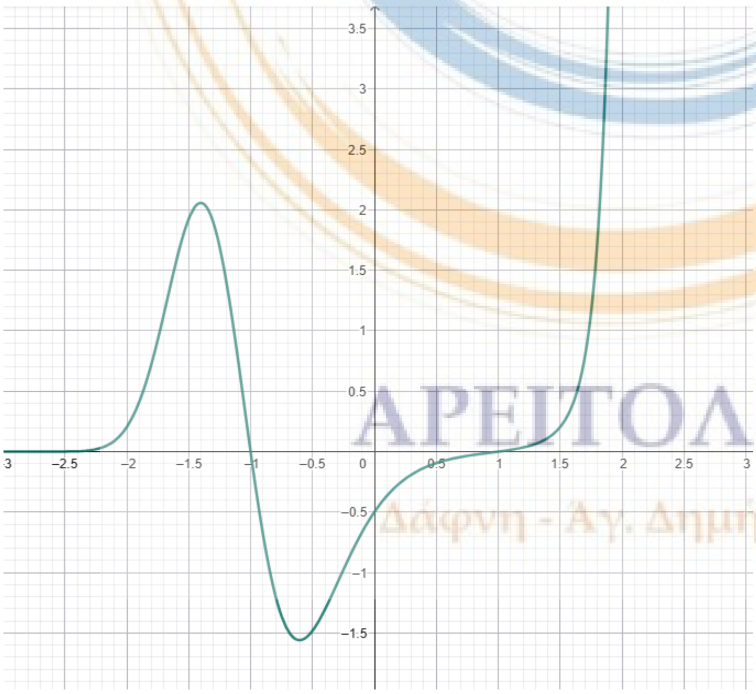
$(i)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = -\infty$ και $(ii)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{\varphi(x)}}\,\eta\mu\frac{1}{\varphi(x)}\right) = 0$ .

Μονάδες (2+4)

## Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f$ ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [-3,3), για την οποία γνωρίζουμε ότι:

• Η γραφική παράσταση της $f\,'$ (παράγωγος της $f$) δίνεται στο σχήμα




• Η ευθεία με εξίσωση 3x+6y=1 εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο τομής της με τον y'y.

Γ1. Αντλώντας στοιχεία από τα προηγούμενα δεδομένα να βρείτε τη μονοτονία και τις θέσεις των ακροτάτων της $f$.

Μονάδες 6

Γ2. Αν δίνεται ότι: $f(x) = \alpha e^{\beta x^3 - \gamma x}$, να βρείτε τον τύπο της $f$.

Μονάδες 6

Για $f(x) = \frac{1}{6} e^{x^3 - 3x}$, $x \in [-3,3)$:

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2026$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f'$, την ευθεία x= - 2 και τον άξονα x'x.

Μονάδες 6

**Θέμα Δ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)lnx, x > 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$.

Δ1. i) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$ και $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x)$. (Μον. 4)

ii) Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0. (Μον. 4)

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κυρτή για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 1 ισχύει: $\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 1) > \int_e^{e^2} \frac{f'(ln\, x)}{x} dx$.

Μονάδες 5



**Ευχόμαστε επιτυχία!!!**