

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ - ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 76.
A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142.
A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 155.
A4. Σ - Σ - Λ - Σ - Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / (1-x)e^x > 0\} = \dots = (-\infty, 1)$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln[(1-x)e^x] = \ln(1-x) + \ln e^x = \ln(1-x) + x$.

B2. Έστω $\varphi(x) = \ln(1-x) + x$, με $x < 1$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x < 1$ ως πράξη και σύνθεση συνεχών και παραγωνισίμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Το πρόσημο της $\varphi'(x)$ και η μονοτονία της φ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

| | | | |
|---------------|-----------|-----|-----|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 |
| $\varphi'(x)$ | + | | - |
| $\varphi(x)$ | ↗ | | ↘ |

Η φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο 0

το $\varphi(0)=0$ Άρα $\varphi(x) \leq 0$ για κάθε $x < 1$

Η φ' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων στο $(-\infty, 1)$ με

$$\varphi''(x) = \frac{-(-1-x)-x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} < 0, \text{ συνεπώς η } \varphi \text{ είναι κοίλη στο } (-\infty, 1).$$

B3. Εξετάζουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln(1-x) + x) = -\infty \text{ διότι: } \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln(1-x)) \stackrel{1-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} (\ln(u)) = -\infty$$

Συνεπώς η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Έστω $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\ln(1-x)+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\ln(1-x))}{x} + 1 = 1, \text{ διότι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\ln(1-x))}{x} =$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1-x} = 0 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1-x)) = +\infty \text{ Άρα η } C_\varphi \text{ δεν έχει ασύμπτωτη στο } -\infty$$

B4. (i) Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1-x) + x) = 0$

και από τον πίνακα της μονοτονίας-ακροτάτων έχουμε: $\varphi(x) \leq 0$,

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varphi(x)} \right) = -\infty.$$

(ii) Από το (i) ερώτημα έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varphi(x)} \right) = -\infty.$

Οπότε αν θέσουμε $\frac{1}{\varphi(x)} = u$ έχουμε:

Για $x \rightarrow 0$ έπεται ότι $u \rightarrow -\infty$

Το όριο γίνεται: $\lim_{u \rightarrow -\infty} (e^{u\eta\mu u})$ συνεπώς:

$$|e^{u\eta\mu u}| \leq e^u \Leftrightarrow -e^u \leq e^{u\eta\mu u} \leq e^u \text{ με } \lim_{u \rightarrow -\infty} (-e^u) = 0 \text{ και } \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{u \rightarrow -\infty} (e^{u\eta\mu u}) = 0.$

Θέμα Γ

Γ1. Από την γραφική παράσταση της f' βλέπουμε ότι είναι θετική στα διαστήματα $(-3,-1)$ και $(1,3)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-3,-1]$ και $[1,3]$. Επίσης η f' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1,1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$. Με βάσει αυτά λοιπόν παρουσιάζει:

- τοπικό ελάχιστο στο σημείο -3 το $f(-3)$
- τοπικό μέγιστο στο σημείο -1 το $f(-1)$
- τοπικό ελάχιστο στο σημείο 1 το $f(1)$

Γ2. Από τα δεδομένα έχουμε επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον $y'y$, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις $f(0) = \frac{1}{6}, f'(0) = -\frac{1}{2}$ και επιπλέον από τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f' με τον $x'x$, έχουμε: $f'(1) = 0, f'(-1) = 0$

Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = ae^{\beta x^3 - \gamma x}(3\beta x^2 - \gamma)$
 $f(0) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}, f'(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \gamma = 3, f'(1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta = 1.$ Άρα
 $f(x) = \frac{1}{6}e^{x^3 - 3x}, x \in [-3,3]$

Γ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[-3,-1] = A_1$ με

$$f(A_1) = [f(-3), f(-1)] = \left[\frac{1}{6}e^{-18}, \frac{1}{6}e^2 \right]$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1] = A_2$ με

$$f(A_2) = [f(1), f(-1)] = \left[\frac{1}{6}e^{-2}, \frac{1}{6}e^2 \right]$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,3] = A_3$ με

$$f(A_3) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)] = [\frac{1}{6}e^{-2}, \frac{1}{6}e^{18}).$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [\frac{1}{6}e^{-18}, \frac{1}{6}e^{18})$$

Το $2026 \in f(A_3)$ άρα υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2026$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3)$ άρα το ξ μοναδικό.

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου που μας ζητείται είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx + \int_{-1}^1 (-f'(x)) dx = [f(x)]_{-2}^{-1} + [-f(x)]_{-1}^1 = f(-1) - f(-2) - f(1) + f(-1) = \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{6}e^{-2} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα Δ

$$\Delta 1. \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{1} \right) = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 .$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) (x \ln x) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0)$ Άρα η f είναι συνεχής στο 0, άρα και σε όλο το $[0, -\infty)$ ως γινόμενο συνεχών.

Για την παραγωγισιμότητα έχουμε:

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - 1) \ln x - 0}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \ln x \right) \stackrel{i}{=} 1 \cdot (-\infty) = -\infty$. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, είναι όμως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x \ln x + (e^x - 1) \frac{1}{x}$

Δ2. Για την κυρτότητα της f έχουμε: $f'(x) = e^x \ln x + (e^x - 1) \frac{1}{x}$ και :

$$f''(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x \frac{1}{x} + (e^x - 1) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) + \frac{xe^x + 1 - e^x}{x^2}$$

Μας ενδιαφέρει το πρόσημο της $f''(x)$ οπότε μελετάμε ξεχωριστά το πρόσημο των εξής συναρτήσεων: $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ και $h(x) = xe^x + 1 - e^x$

- $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $\varphi(1) = 1$ συνεπώς $\varphi(x) \geq 1 > 0$.
- $h'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x > 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ Άρα για $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > 0$.

Οπότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, -\infty)$ οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος

Δ3. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο 1 είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1), \text{ με } f'(x) = e^x \ln x + (e^x - 1) \frac{1}{x}, \text{ οπότε } f'(1) = e - 1, f(1) = 0$$

$$\text{Συνεπώς έχουμε: } y = (e - 1)(x - 1)$$

Η f είναι κυρτή, οπότε η εφαπτομένη είναι κάτω από τη C_f , με μοναδικό κοινό σημείο το σημείο επαφής 1.

Άρα για $x > 1$ ισχύει:

$$f(x) > y \Leftrightarrow f(x) > (e-1)(x-1) \Leftrightarrow (e^x-1)\ln x > (e-1)(x-1) \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e-1} > \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\Delta 4. f(x^2+1) > \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln x)}{x} dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος

$$\text{Θέτουμε } \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du,$$

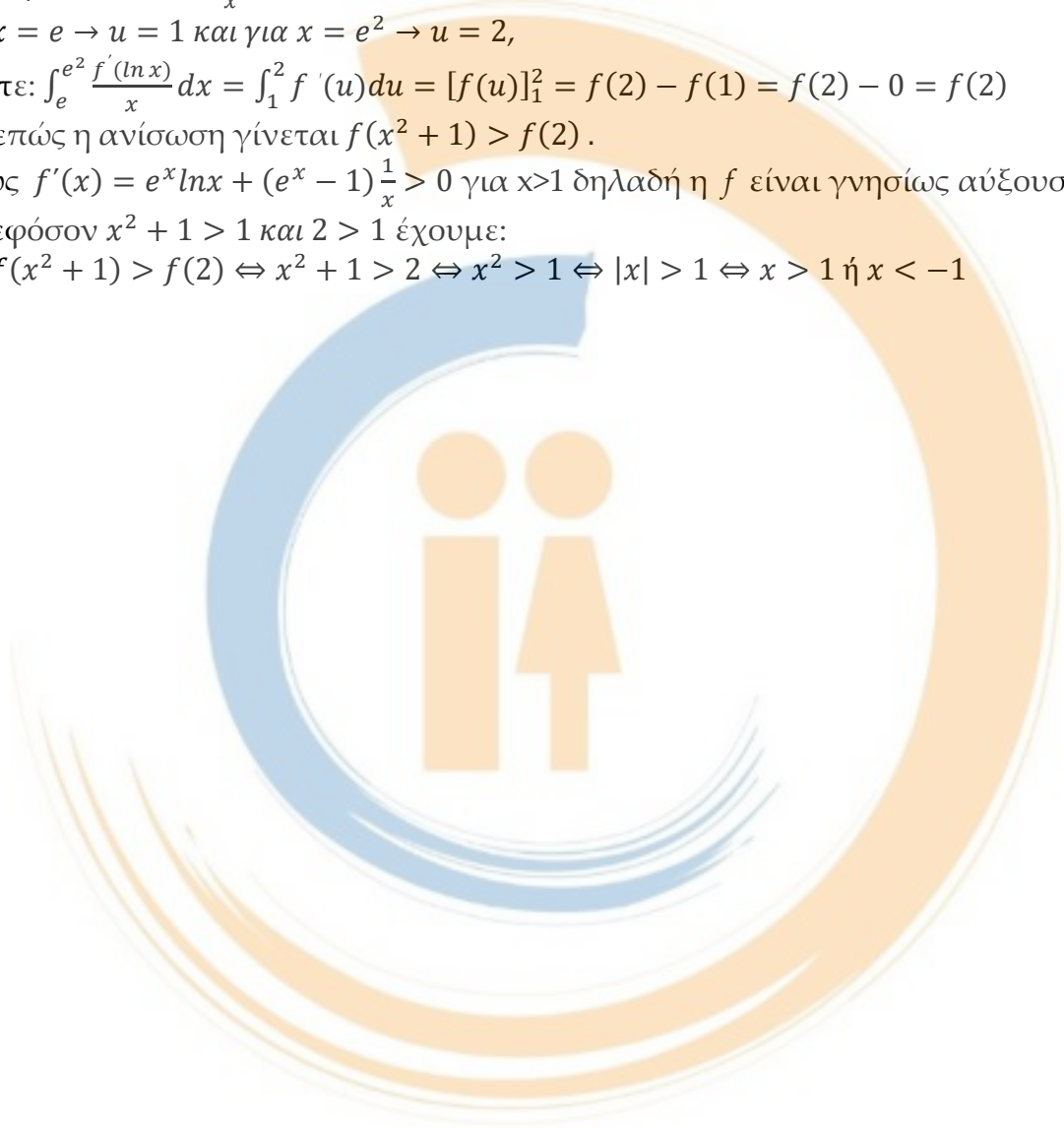
$$\text{Για } x = e \rightarrow u = 1 \text{ και για } x = e^2 \rightarrow u = 2,$$

$$\text{Οπότε: } \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \int_1^2 f'(u) du = [f(u)]_1^2 = f(2) - f(1) = f(2) - 0 = f(2)$$

Συνεπώς η ανίσωση γίνεται $f(x^2+1) > f(2)$.

Όμως $f'(x) = e^x \ln x + (e^x - 1) \frac{1}{x} > 0$ για $x > 1$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα και εφόσον $x^2 + 1 > 1$ και $2 > 1$ έχουμε:

$$f(x^2+1) > f(2) \Leftrightarrow x^2+1 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x < -1$$



ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος