

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ ΙΩΑΝΝΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(Μονάδες 7)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

(Μονάδες 4)

A3. Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα από κάθε μία τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

β) Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

γ) Αν μία συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

δ) Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$.

ε) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $x \neq 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

(Μονάδες 7)

B2. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = \frac{x}{4-x}$, $x \in \mathbb{R} - \{2, 4\}$.

(Μονάδες 5)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f \circ f$, για $x > 4$.

(Μονάδες 6)

B4. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (f \circ f)(x) \cdot f(x-1)$ υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$xf'(x) = \eta\mu x - f(x) \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2\pi}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 6)

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

(Μονάδες 7)

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\phi(x) = x^2 f(x)$, τον x ' x άξονα και τις ευθείες $x = 0$ και $x = -\frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f'' συνεχής στο \mathbb{R}
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 3$ (Μονάδες 4) και στη συνέχεια να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 2)

(Μονάδες 6)

Δ2. Αν επιπλέον $f(2) = 8$, τότε:

- να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4$. (Μονάδες 3)
- να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

(Μονάδες 7)

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x-1) + 2 = \ln x + 2x$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η F είναι μία παράγουσα της f στο \mathbb{R} με $F(0) = 0$, να

υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln |f(x) - 3x|}{F(x) - \frac{3}{2}x^2}$.

(Μονάδες 6)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!