ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΜΑΪΟΥ 2025

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ ΙΩΑΝΝΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 106
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 76
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 143
Α4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1-2} = \frac{x_2}{x_2-2} \Leftrightarrow \cancel{x_1 x_2} - 2x_1 = \cancel{x_1 x_2} - 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

Συνεπώς η f είναι "1−1".

Β2. $A_{f\circ f} = \left\{x \neq 2 / \dfrac{x}{x-2} \neq 2\right\} = \{x \neq 2 / x \neq 2x-4\} = \{x \neq 2 / x \neq 4\} =$

$$= (-\infty, 2) \cup (2,4) \cup (4, +\infty) \neq \varnothing$$

Επίσης $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{\frac{x}{x-2}}{\frac{x}{x-2} - 2} = \dfrac{\frac{x}{x-2}}{\frac{x-2x+4}{x-2}} = \dfrac{x}{4-x}, x \neq 2, 4$

Β3. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x}{4-x} = \lim\limits_{x\to 4^+}\left(x \cdot \dfrac{1}{4-x}\right) = -\infty$

Άρα η $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f\circ f}$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{4-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2+4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x+4} = -1$$

Άρα η ευθεία $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{f\circ f}$

Β4. $g(x) = (f \circ f)(x) \cdot f(x-1),\ x \in [0,1]$

- Η g συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών
- Η g παρ/μη στο $(0,1)$ ως σύνθεση και πράξεις παρ/μων

- $g(0) = f(f(0)) \cdot f(-1) = 0$
- $g(1) = f(f(1)) \cdot f(0) = 0$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση $xf'(x) = ημx - f(x) \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = ημx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x \cdot f(x))' = (-συνx)' \underset{\substack{x, f(x), συνx \\ συνεχείς}}{\Rightarrow} x \cdot f(x) = -συνx + c$$

και αφού $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2\pi}$ τότε για $x = \frac{\pi}{3}$ έχουμε:

$\frac{\pi}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -συν\frac{\pi}{3} + c \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2\pi} = -\frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $xf(x) = -συνx + 1$.

Για $x \neq 0$: $f(x) = \frac{1 - συνx}{x}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Για $x = 0$: η f συνεχής άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - συνx}{x} = 0$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - συνx}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Γ2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1 - συνx}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - συνx}{x^2} \underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{ημx}{2x} \underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{συνx}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Γ3. Για $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{xημx - 1 + συνx}{x^2}$

Θέτω $h(x) = xημx - 1 + συνx$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Η h παραγωγίσιμη στο A_h ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$h'(x) = ημx + xσυνx - ημx = x \cdot συνx$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow xσυνx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm\frac{\pi}{2}$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow xσυνx > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow h(x)\geq 0$ με το "=" μόνο για x=0

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Άρα $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και

$f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}>0$ για κάθε $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Επίσης η f είναι συνεχής στο 0.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Γ4. $E(\Omega)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\phi(x)|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left|x^2\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|x\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)|dx$

Άρα $\phi(x)=x\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)$ με $\phi(x)\leq 0$ για $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ αφού $x\leq 0$ και $1-\sigma\upsilon\nu x\geq 0$

Άρα $E(\Omega)=\int_{-\pi/2}^{0}(x\sigma\upsilon\nu x-x)dx=\int_{-\pi/2}^{0}x\sigma\upsilon\nu x dx-\int_{-\pi/2}^{0}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'dx=\int_{-\pi/2}^{0}x(\eta\mu x)'dx-\dfrac{1}{2}\left[x^2\right]_{-\pi/2}^{0}$

$=\left[x\eta\mu x\right]_{-\pi/2}^{0}-\int_{-\pi/2}^{0}\eta\mu x dx-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi^2}{4}\right)=\dfrac{-\pi}{2}+\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\pi/2}^{0}+\dfrac{\pi^2}{8}=-\dfrac{\pi}{2}+1+\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{\pi^2-4\pi+8}{8}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από (Υ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$. Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3$.

Τότε $f(x)=x\cdot g(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot g(x)=0\cdot 3=0\overset{f\sigma\upsilon\nu}{\Rightarrow}f(0)=0$.

Επίσης $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{(Y)}{=}3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=3x$.

Δ2. i) Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο [0,2].
Η f συνεχής στο $[0,2]\subseteq\mathbb{R}$
Η f παρ/μη στο $(0,2)\subseteq\mathbb{R}$

Τότε υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{8-0}{2}=4$.

ii) Από το Δ2. i) $f'(\xi)=4$ και $f'(0)=3$ από Δ1.

Η f' είναι συνεχής αφού υπάρχει η f''. Επειδή $f''(x)\neq 0$ και f'' συνεχής από υπόθεση τότε η f'' διατηρεί πρόσημο δηλ. $f''(x)>0$ ή $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Σε κάθε περίπτωση η f' είναι γνησίως μονότονη.
Επειδή $\xi > 0$ και $f'(\xi) = 4 > 3 = f'(0) \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(0) \Rightarrow f' \uparrow$
Επομένως η f είναι κυρτή.
Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη άρα και από την εφαπτομένη στο 0, δηλ. $f(x) \geq 3x$ κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει για $x = 0$.

Δ3. Από το Δ2. έχουμε $f(x) \geq 3x$ και βάζοντας όπου x το $x-1$ έχουμε:
$f(x-1) \geq 3(x-1) \Leftrightarrow f(x-1) \geq 3x-3 \Leftrightarrow f(x-1)+2 \geq 3x-1$ (1)
και το "=" ισχύει μόνο για x=1.

Επίσης για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x-1 \Leftrightarrow \ln x + 2x \leq 3x-1$ (2)
και το "=" ισχύει μόνο για x=1.

Από τις (1) και (2) έχουμε
$f(x-1)+2 \geq 3x-1 \geq \ln x + 2x$ και το "=" ισχύει μόνο για x=1.

Άρα η εξίσωση $f(x-1)+2 = \ln x + 2x$ έχει μοναδική λύση το 1.

Δ4. Η F παρ/μη $\Rightarrow$ F συνεχής με $F(0) = 0$ και $F'(x) = f(x)$.
Από (Δ2) $f(x) \geq 3x \overset{x \neq 0}{\Rightarrow} f(x)-3x > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-3x\right) = 0$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln|f(x)-3x|}{F(x)-\frac{3}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln\left(f(x)-3x\right)}{F(x)-\frac{3}{2}x^2} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(f(x)-3x\right) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

διότι θέτω $u = f(x)-3x$ με $\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-3x\right) \overset{f\sigma\upsilon\nu}{=} f(0)-3\cdot 0 = 0$ και $f(x)-3x > 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{F(x)-\frac{3}{2}x^2} \underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{F'(x)-3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)-3x} = +\infty$ αφού $f(x)-3x > 0$