ΤΡΙΤΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΔΡΟΥΓΑΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 83
Α2. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ
Α3. Α. 5, Β. 1, Γ. 4, Δ. 3

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $2p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$, οπότε η Εστία Ε έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{4},0\right)$

Β2. Το σημείο Α ανήκει στην παραβολή καθώς επαληθεύει την εξίσωση της: $(-1)^2=1$

Β3. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α έχει εξίσωση

$$y(-1)=\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοθείσα εξίσωση $x^2+y^2-6x-4y+8=0$ παριστάνει κύκλο όταν
$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$, όπου Α=-6, Β=-4, Γ=8.
Έτσι $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=36+16-32=20>0$
Η ακτίνα του κύκλου είναι

$$\rho=\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}{4}}=\sqrt{\frac{20}{4}}=\sqrt{5}$$

Και το κέντρο του $\mathrm{K}(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2})$ ή $\mathrm{K}(-\frac{-6}{2},-\frac{-4}{2})$ ή $\mathrm{K}(3,2)$.

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

Γ2. Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου στο σημείο του Α(4,4) τότε οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας
$4=4\lambda+\beta \Leftrightarrow 4-4\lambda=\beta$
Άρα η $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ παίρνει την μορφή $y=\lambda x+4-4\lambda \Leftrightarrow \lambda x-y+4-4\lambda=0$

Για να εφάπτεται στον κύκλο, αρκεί $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho \Rightarrow \dfrac{|\lambda(3)-2+4-4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(1)^2}}=\sqrt{5}$

$$\frac{|\lambda(3)-2+4-4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |2-\lambda|=\sqrt{5}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (2-\lambda)^2=5(\lambda^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=5\lambda^2+5 \Leftrightarrow 4\lambda^2+4\lambda+1=0 \Leftrightarrow (2\lambda+1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

Οπότε $y=-\dfrac{1}{2}x+4-4\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+6$

Γ3. $d(\mathrm{K},\eta)=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 2-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

Γ4. $d(\mathrm{K},\eta)=1<\sqrt{5}$ άρα η ευθεία (η) τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για λ=1 η (1) παίρνει την μορφή: $y=1\cdot(x-2)+1-2$ ή $y=x-3$.

Για λ=2 η (1) παίρνει την μορφή: $y=2\cdot(x-2)+2-2$ ή $y=2x-4$.

Θα βρούμε το κοινό σημείο λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x-3=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Άρα Μ(1,-2).

Δ2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$ (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έτσι, $-2=\lambda(1-2)+\lambda-2 \Leftrightarrow -2=\lambda-2\lambda+\lambda-2 \Leftrightarrow 0=0$.

Δ3. i. Για y=0 στην (1) εχουμε

$$0=\lambda(x-2)+\lambda-2 \Leftrightarrow 0=\lambda x-2\lambda+\lambda-2 \Leftrightarrow 0=\lambda x-\lambda-2 \Leftrightarrow \lambda x=\lambda+2.$$

Αν λ=0 προκύπτει 0=2.

Άρα $\lambda\neq 0$ οπότε $x=\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$, έτσι $\mathrm{A}\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda},0\right)$.

Για x=0 στην (1) εχουμε

$$y=\lambda(0-2)+\lambda-2 \Leftrightarrow y=-2\lambda+\lambda-2 \Leftrightarrow y=-\lambda-2\text{, έτσι } \mathrm{B}(0,-\lambda-2).$$

Συνεπώς η ευθεία τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα σημεία $\mathrm{A}\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda},0\right)$, $\mathrm{B}(0,-\lambda-2)$.

Δ4. Ισχύει $(\mathrm{OA})=\left|\dfrac{\lambda+2}{\lambda}\right|$, $(\mathrm{OB})=|-\lambda-2|$

και το εμβαδό

$$(\text{OAB}) = \frac{1}{2}(\text{OA})(\text{OB}) = \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda+2}{\lambda}\right||-\lambda-2| = \frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|}|\lambda+2| = \frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}$$

Όμως από την υπόθεση ισχύει: $(\text{OAB}) = \frac{1}{2}$

Εξισώνουμε και λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|} \Leftrightarrow 1 = \frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|} \Leftrightarrow |\lambda| = |\lambda+2|^2 \Leftrightarrow |\lambda| = (\lambda+2)^2 \quad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ:

I. $\lambda > 0$ η εξίσωση (2) γίνεται: $\lambda = (\lambda+2)^2 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$

που είναι αδύνατη ($(\Delta = -7 < 0)$.

II. $\lambda < 0$ η εξίσωση (2) γίνεται: $-\lambda = (\lambda+2)^2 \Leftrightarrow -\lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

Από όπου προκύπτει $\lambda = -1$ ή $\lambda = -4$.