

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

[Μονάδες 7]

A2. Να διατυπώστε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

[Μονάδες 4]

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη:

i) σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ii) σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ υποσύνολο του πεδίου ορισμού της;

[Μονάδες 4]

A4. Να εξετάσετε αν οι προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ):

α) Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ είναι ίσες.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Αν για οποιαδήποτε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) > 0$, τότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\eta\mu x| \leq |x|$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

[Μονάδες 10]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $x > 0$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

[Μονάδες 7]

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

[Μονάδες 5]

B3. Αν $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1} + \frac{f^{-1}(x)}{x-e} = 1$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

[Μονάδες 6]

B4. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g(x) = f(\ln x)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)}.$$

[Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 1 \\ \beta + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα α και β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

[μονάδες 7]

Για $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

[μονάδες 6]

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2025$.

[μονάδες 6]

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , με $x \leq 0$, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-2, 2)$.

[μονάδες 6]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}
- η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 1$ εφαπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0, f(0))$
- $\int_0^1 2f(x)dx + \int_0^1 (2x-1)f'(x)dx = 3$
- $f(x) \geq e^{x-1} + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = 2$.

[μονάδες 5]

Δ2. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2 = f'(1)$ και στη συνέχεια ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0, 1)$.

[μονάδες 8]

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{x_0} f(x)dx < x_0^2 + x_0$, όπου x_0 η θέση του σημείου καμπής.

[μονάδες 6]

Δ4. Δίνεται και η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $N(\xi, g(\xi))$

με $\xi \in (-2, 2)$ στο οποίο η γραφική παράσταση της g δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $K(-2, g(-2))$ και $L(2, g(2))$.

[μονάδες 6]

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ