ΣΑΒΒΑΤΟ 15 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 77

Α3. i) Σχολικό βιβλίο σελ. 95

ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Είναι $e^x>0$ και $e^x-1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, επομένως $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε
$f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, γιατί:
Θέτουμε $u=e^x-1$. Όταν $x\to0^+$, τότε $u\to0^+$ και όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to+\infty$. Οπότε
$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ell n(e^x-1)\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\left(\ell nu\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n(e^x-1)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\ell nu\right)=+\infty$.

Β2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Επίσης $D_{f^{-1}}=f\left((0,+\infty)\right)=\mathbb{R}$.
Για τον τύπο της f^{-1}: Για $x\in(0,+\infty)$ και $y\in\mathbb{R}$ έχουμε
$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y\Leftrightarrow \ell n(e^x-1)=y\Leftrightarrow e^x-1=e^y\Leftrightarrow e^x=e^y+1\Leftrightarrow x=\ell n(e^y+1)$.
Άρα $f^{-1}(x)=\ell n(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Β3. $\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(x)}{x-e}=1\Leftrightarrow (x-e)f(x)+(x-1)f^{-1}(x)-(x-1)(x-e)=0$.

Θέτουμε $\varphi(x)=(x-e)f(x)+(x-1)f^{-1}(x)-(x-1)(x-e)$, $x\in[1,e]$.
Η φ είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών.
$\varphi(1)=(1-e)f(1)=(1-e)\ell n(e-1)<0$ και $\varphi(e)=(e-1)f^{-1}(e)=(e-1)\ell\text{n}\left(e^e+1\right)>0$,

Οπότε $\varphi(1)\cdot\varphi(e)<0$.
Από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

B4. Για το πεδίο ορισμού της g:
Πρέπει να ισχύει $x>0$ και $\ell nx\in D_f \Leftrightarrow \ell nx>0 \Leftrightarrow x>1$. Άρα $D_g=(1,+\infty)$.
Ο τύπος της g είναι: $g(x)=f\left(\ell nx\right)=\ell n\left(e^{\ell nx}-1\right)=\ell n(x-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n(x-1)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{g(x)}\cdot\eta\mu g(x)\right)=0$, γιατί:

$\left|\eta\mu g(x)\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{g(x)}\cdot\eta\mu g(x)\right|\le\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|\Leftrightarrow-\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|\le\dfrac{1}{g(x)}\cdot\eta\mu g(x)\le\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|=0$.

Επομένως από κ.π. έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{g(x)}\cdot\eta\mu g(x)\right)=0$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Πρέπει η f να είναι συνεχής στο 1, οπότε:
$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\alpha=\beta\ \ (1)$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\alpha x^2-a}{x-1}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2\alpha x}{1}=2a$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\alpha+\dfrac{\ell nx}{x}-a}{x-1}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{1-\ell nx}{x^2}}{1}=1$.
Πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1, οπότε:
$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow 2\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}$
$(1)\Rightarrow\beta=\dfrac{1}{2}$.

Γ2. Είναι $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2,\ x\le1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\ell nx}{x}\ ,\ x>1\end{cases}$.
Από το Γ1. έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο 1.
Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Από το Γ1. έχουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο 1, με $f'(1)=1$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x)=x$ και στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\dfrac{1-\ell nx}{x^2}$.

Επομένως $f'(x)=\begin{cases} x,\ x\le 1 \\ \dfrac{1-\ell nx}{x^2}\ ,\ x>1 \end{cases}$.

Για $x\le 1$: $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Για $x>1$: $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ell nx}{x^2}\ge 0 \Leftrightarrow \ell nx\le 1 \Leftrightarrow x\le e$.

Οπότε ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	o $+$	$+$	o $-$	
$f(x)$	↘	↗	↗	↘	

Άρα η f να είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και στο $[e,+\infty)$, ενώ είναι γν. αύξουσα στο $[0,e]$ (αφού είναι συνεχής στο 1).
Η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο 0 ίσο με $f(0)=0$ και τοπ. μέγιστο στο e ίσο με $f(e)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e}$.

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}x^2=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\ell nx}{x}\right)=\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του Γ2. για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

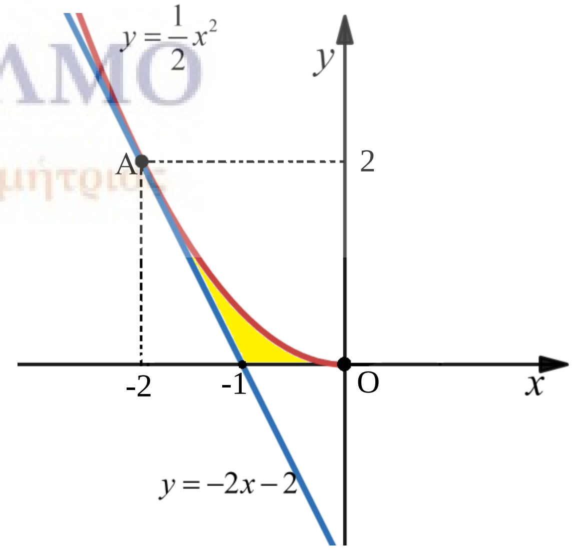
$\Delta_1=f\left((-\infty,0]\right)=[0,+\infty)$, $\Delta_2=f\left([0,e]\right)=\left[0,\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e}\right]$ και $\Delta_3=f\left([e,+\infty)\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e}\right]$.

Άρα $f\left(\mathbb{R}\right)=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3=[0,+\infty)$.

Το 2025 περιέχεται μόνο στο Δ_1 και η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, επομένως η εξίσωση $f(x)=2025$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση:
$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y=-2x-2$.
$y=0\Leftrightarrow -2x-2=0\Leftrightarrow x=-1$, οπότε η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(-1,0)$.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx-\int_{-2}^{-1}(-2x-2)\,dx=$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx-\int_{-2}^{-1}(-2x-2)\,dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0}-\left[-x^2-2x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}\ \text{τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ευθεία (ε): $y=2x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0, f(0))$, οπότε το Α είναι κοινό σημείο της C_f και της (ε). Επομένως $f(0)=2\cdot 0+1=1$.

Είναι $\int_0^1 2f(x)dx+\int_0^1(2x-1)f'(x)dx=3 \Leftrightarrow \int_0^1\left(2f(x)+(2x-1)f'(x)\right)dx=3 \Leftrightarrow$

$\int_0^1\left((2x-1)f(x)\right)'dx=3 \Leftrightarrow \left[(2x-1)f(x)\right]_0^1=3 \Leftrightarrow f(1)+f(0)=3 \overset{(f(0)=1)}{\Leftrightarrow} f(1)=2$.

Δ2. Η ευθεία (ε): $y=2x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0, f(0))$, οπότε $f'(0)=\lambda_\varepsilon=2$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq e^{x-1}+x \Leftrightarrow f(x)-e^{x-1}-x\geq 0$ (1)
Θέτουμε $h(x)=f(x)-e^{x-1}-x$, $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε (1) $\Leftrightarrow h(x)\geq h(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1.
Επίσης η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $h'(x)=f'(x)-e^{x-1}-1$.
Οπότε η h είναι παραγωγίσιμη και στο 1, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.
Από Θ. Fermat έχουμε $h'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=2$.

Για την f' ισχύει το Θ. Rolle στο $[0,1]$, αφού
είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη,
είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ από υπόθεση και
$f'(0)=f'(1)=2$.
Επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.
Επίσης η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι το μοναδικό σημείο που μηδενίζεται.

Για $x<x_0 \overset{f'':\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x)<0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_0]$.
Για $x>x_0 \overset{f'':\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[x_0,+\infty)$.
Άρα το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και είναι μοναδικό αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το x_0 είναι το μοναδικό σημείο που μηδενίζεται η f''.

Δ3. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_0]$ και η (ε): $y=2x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0, f(0))$, οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε).
Οπότε $f(x)\leq 2x+1$ για κάθε $x\in[0,x_0]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
Επομένως $\int_0^{x_0}f(x)\,dx<\int_0^{x_0}(2x+1)\,dx \Leftrightarrow \int_0^{x_0}f(x)\,dx<\left[x^2+x\right]_0^{x_0} \Leftrightarrow \int_0^{x_0}f(x)\,dx<{x_0}^2+x_0$.

Δ4. Η g είναι συνεχής στο $[-2,0)$ ως πολυωνυμική και στο $(0,2]$ ως παραγωγίσιμη.
Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1$ και $g(0)=f(0)=1$.
Οπότε η g είναι συνεχής και στο 1.
Άρα η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,0)$ ως πολυωνυμική και στο $(0,2)$ από υπόθεση.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\big(2(x+1)\big)=2$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$.

Οπότε η g είναι παραγωγίσιμη και στο 1.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(2)-g(-2)}{4}$.

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{K}\big(-2,g(-2)\big)$ και $\Lambda\big(2,g(2)\big)$ έχει κλίση

$\lambda_{\mathrm{K}\Lambda}=\dfrac{g(2)-g(-2)}{4}$.

Οπότε $g'(\xi)=\lambda_{\mathrm{K}\Lambda}$.

Άρα η εφαπτομένη της C_g σημείο $\mathrm{N}\big(\xi,g(\xi)\big)$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{K}\big(-2,g(-2)\big)$ και $\Lambda\big(2,g(2)\big)$.