ΣΑΒΒΑΤΟ 15 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ – ΔΗΜΟΥΛΕΑΣ ΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 71.

Α2. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β *(Τράπεζα Θεμάτων)*

Β1. Το τριώνυμο: $x^2 - x - 2$ έχει α=1 , β = -1, γ= -2 και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

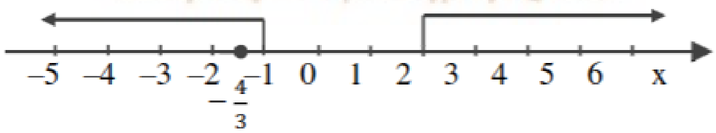
Β2. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

Β3.



Το $-\frac{4}{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (**Β1**).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τριώνυμο: $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 2 - \lambda^2$
και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 8 + 4\lambda^2$$

Είναι $\Delta = 8 + 4\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ2. Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε

i) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$.

ii) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2-\lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$.

Γ3. Έστω $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ και x_2 η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

i) Από το άθροισμα των ριζών έχουμε ότι:

$$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$2 + \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$x_2 = 4 - 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

ii) Από το γινόμενο των ριζών έχουμε ότι:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$2^2 - \sqrt{3}^2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \pm 1$$

ΘΕΜΑ Δ *(Τράπεζα Θεμάτων)*

Δ1. Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -8$
και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = 4 \\ \dfrac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2,4)$$

και

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ή } x > 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty).$$

Δ2. Για να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ πρέπει να γνωρίζουμε σε ποιο από τα διαστήματα του ερωτήματος Δ1. ανήκει ο $\kappa = -\frac{8889}{4444}$. Συγκρίνουμε τον κ με το -2:

$$\kappa - (-2) = -\frac{8889}{4444} + 2 = -\frac{8889}{4444} + \frac{8888}{4444} = -\frac{1}{4444} < 0.$$

Άρα, $\kappa - (-2) < 0 \Leftrightarrow \kappa < -2$. Οπότε, από τον πίνακα του ερωτήματος Δ1. συμπεραίνουμε ότι $\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$.

Δ3. Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8.$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο για $x = |\mu|$.

Επίσης έχουμε ότι:

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4 \Leftrightarrow 0 \leq |\mu| < 4.$$

Από τον πίνακα προσήμων του ερωτήματος Δ1. διαπιστώνουμε ότι για $0 \leq |\mu| < 4$ είναι:

$$|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0.$$