

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ – ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας

(i) σε ένα σημείο  $x_0 \in A$ .

(ii) σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  υποσύνολο του  $A$ .

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο απαντήσεων, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ .

**β.** Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ , ισχύει:  $(f(x_0))' = f'(x_0)$ .

**γ.** Αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ .

**δ.** Αν  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες.

**ε.** Αν μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$ , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = e^x + 1$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 4}{e^x - 1}$  με  $x > 0$  να αποδείξετε ότι η  $f \circ g$  είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 7**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln \frac{x+4}{x-1}$  με  $x > 1$  να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^{\varphi(x)} - x^2 + 1 = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει:  $1 - f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  για κάθε  $x \in R$ .

**Γ1.** Αν  $f(0) = -\ln 2$  να αποδείξετε ότι:  $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ ,  $x \in R$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2. (i)** Να αποδείξετε ότι  $f(1) = 1 + f(-1)$ .

**Μονάδες 4**

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (-1, 1)$  τέτοιο ώστε  $2f'(\xi) = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι:  $x - 2f(x) \geq \ln 4$  για κάθε  $x \in R$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να υπολογίστε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{f(x)} \eta \mu f(x) + \ln f'(x) \right)$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x^2}, & x \leq 0 \\ g(x), & x > 0 \end{cases}$  με  $g'(x) = -2x + 3$  για κάθε  $x > 0$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x^2}, & x \leq 0 \\ -x^2 + 3x, & x > 0 \end{cases}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , για  $x > 0$ , που διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 0)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Ένα σώμα  $M$  κινείται πάνω στη  $C_f$  με  $x > 0$  ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό  $0,2 \mu/\text{sec}$ . Αν  $K$  είναι η προβολή του  $M$  πάνω στον άξονα  $x'$  και  $A$  είναι το σημείο του  $\Delta 3$  ερωτήματος, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $AMK$  τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του  $M$  είναι 1.

**Μονάδες 6**

**ΑΡΕΙΤΟΛΑΜΟ**  
ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος