

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ**

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΛΕΞΗΣ ΔΗΜΟΥΕΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 16 σχολικού βιβλίου.

A2. Σελ. 31 σχολικού βιβλίου.

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

A4. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

β) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

γ) $(cf)'(x) = cf'(x)$

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (2x^3 - x^2 + x - 1)' = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 1 - 0 = 6x^2 - 2x + 1$$

Το τριώνυμο $6x^2 - 2x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 4 - 24 = -20 < 0$.

Άρα, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι:

$$y = g'(1)x + \beta \quad (1)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$g'(x) = (6x^2 - 2x + 1)' = 6 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 12x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$g'(1) = 12 \cdot 1 - 2 = 10$$

Επειδή το σημείο $(1, g(1)) = (1, 5)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε από την (1):

$$5 = 10 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -5$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = 10x - 5$$

B3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x + 1 - 5}{12x - 2 - 10} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (12x - 12) = 0$, δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του ηλίκου για το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12}$$

Έτσι, παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος

$$\frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(6x+4)}{12(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x+4}{12} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = (ax^2 - 2x)' = 2ax - 2$.

ii) Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Επομένως ισχύει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Γ2. Για $a = 1$ έχουμε $f(x) = x^2 - 2x$ και $f'(x) = 2x - 2$.

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ και επιπλέον

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.
 Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο
 διάστημα $[1, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'		0	$+$
f	↘		↗

Γ3. Για $a=1$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(\sqrt{x}+1) = 4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s είναι:

$$h(t_1) = h(2) = 8 \cdot 2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \text{ m}$$

Δ2. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$v(t) = h'(t)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $h(t)$ είναι:

$$h'(t) = (8t - t^2)' = (8t)' - (t^2)' = 8 \cdot 1 - 2t = 8 - 2t$$

Επομένως, $v(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$.

Δ3. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s είναι:

$$v(t_1) = v(2) = 8 - 2 \cdot 2 = 4 \text{ m/s}$$

Δ4.

Είναι:

$$h'(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$h'(t) > 0 \Leftrightarrow 8 - 2t > 0 \Leftrightarrow t < 4$, επομένως $h'(t) > 0$ για $0 < t < 4$ Έχουμε,
 $h'(4) = 0$, $h'(t) > 0$ για $0 < t < 4$ και $h'(t) < 0$ για $4 < t < 8$. Οπότε, το ύψος
γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 4$ s. Η μέγιστη τιμή του ύψους είναι $h(4) = 8 \cdot$
 $4 - 4^2 = 32 - 16 = 16$ m.



ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος