ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η απόδειξη βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 38.

Α2. Σ – Λ – Λ – Σ – Λ

ΘΕΜΑ Β

α) Έχουμε $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\cdot(1,-2)+(2,3)=(2,-4)+(2,3)=(4,-1)$

β) Για να είναι κάθετα τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (4,-1)\cdot(1,\kappa)=0 \Leftrightarrow 4\cdot 1+(-1)\cdot\kappa=0 \Leftrightarrow 4-\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=4$

γ) Για $\kappa=4$ έχουμε $\vec{v}=(1,4)$ και το μέτρο του είναι $|\vec{v}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

ΘΕΜΑ Γ

α) $|\vec{\beta}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ και $\vec{u}=\vec{a}-\vec{\beta}=(1,2)-(-2,1)=(3,1)$, οπότε $|\vec{u}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

β) $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=-2\cdot 3+1\cdot 1=-5$

γ) $\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta},\vec{u})=\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{-5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η γωνία τους είναι 135°.

δ) $\lambda_\alpha=\dfrac{2}{1}=2$. Θέτοντας στην εξίσωση $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ όπου (x_o,y_o) το $(3,1)$ και λ=2,
έχουμε: $y-1=2(x-3)\Leftrightarrow \boxed{y=2x-5}$.

ε) σημείο τομής με $x'x$: $0=2x-5\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$, άρα τον άξονα $x'x$ τον τέμνει στο σημείο $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$

σημείο τομής με $y'y$: $y=2\cdot 0-5\Leftrightarrow y=-5$, άρα τον άξονα $y'y$ τον τέμνει στο σημείο $(0,-5)$.

ΘΕΜΑ Δ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}|^2 = (|\vec{\alpha}| - 4)^2 + (|\vec{\alpha}| - 2)^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 12|\vec{\alpha}| + 20 = 0 \Leftrightarrow$
$|\vec{\alpha}| = 2$ ή $|\vec{\alpha}| = 10$.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ τότε $\vec{\alpha} = (-2,0)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (-2,0)$ και $\overrightarrow{OB} = (6,8)$ δεν είναι παράλληλα (σχηματίζουν τρίγωνο), αφού $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ επομένως η λύση είναι δεκτή.

Αν $|\vec{\alpha}| = 10$, τότε $\vec{\alpha} = (6,8) = \overrightarrow{OB}$ επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν σχηματίζουν τρίγωνο. Έτσι, η λύση αυτή απορρίπτεται.

β) Για να είναι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B\Gamma}$ (1). Αν $\Gamma(x,y)$ τότε η σχέση (1) γράφεται:
$(-2,0) = (x-6, y-8) \Leftrightarrow x - 6 = -2$ και $y - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ και $y = 8$, δηλαδή $\Gamma(4,8)$.

γ) Αρκεί να βρούμε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AB}$.
Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (8,8)$. Επίσης $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = (2,0)$.
Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AB}$, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{16}{2\cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$