ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ
ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: «Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό».

[Μονάδες 7]

Α2. Να διατυπώσετε το «Κριτήριο παρεμβολής».

[Μονάδες 4]

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο;

[Μονάδες 4]

Α4. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

i) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύει: αν η f είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.

ii) Έστω x, y δύο μεταβλητά μεγέθη που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0. Ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την $f'(x_0)$.

iii) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

iv) Ισχύει ότι $\left(3^x\right)' = x\cdot 3^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

[Μονάδες 10]

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και είναι $f^{-1}(x) = \ell n x - 2$, $x > 0$.

[Μονάδες 7]

Β2. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

[Μονάδες 6]

Β3. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f^{-1}\circ g$ και h με $h(x) = \dfrac{\ell n(x-1) - 4}{2}$ είναι ίσες.

[Μονάδες 4]

Β4. Να δείξετε ότι: **i)** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)-1}\right) = 0$ και

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x-3}\cdot g(x)\right) = +\infty$.

[Μονάδες 8]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot f(x)+\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=-1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=-5$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

[Μονάδες 8]

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{x_0-1}+\dfrac{1}{x_0-2}=\dfrac{2024}{f(x_0)}$.

[Μονάδες 7]

Αν επιπλέον ισχύει ότι $f^2(x)+f(x^2)=2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε:

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(1)=-2$.

[Μονάδες 5]

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\big(1,f(1)\big)$.

[Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση g με τύπο

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\leq 0\\ \kappa-\ell n(x^2+1), & x>0\end{cases},\ \kappa\in\mathbb{R}.$$

Επίσης ισχύει ότι:

- η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\big(0,f(0)\big)$ είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=2x+1$ και
- $f^2(x)-4xf(x)=e^{2x}-2xe^x-3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-1}{x}=2$.

[Μονάδες 4]

Δ2. Αν ισχύει ότι $e^x>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+x$ και $\kappa=1$.

[Μονάδες 8]

Για $\kappa=1$:

Δ3. Να αποδείξετε ότι : **i)** το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $(-\infty,1]$.

[Μονάδες 5]

ii) η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες οι οποίες είναι ετερόσημες.

[Μονάδες 3]

Δ4. Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Δ3, με $x_1<x_2$ να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in[x_1,x_2]$, ισχύει ότι: $0\leq\dfrac{g(\alpha)+2g(\beta)}{3}\leq 1$.

[Μονάδες 5]

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!