*ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2024*

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ ΑΓΓΕΛΙΚΗ
ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 32.

Α4. i) Λ  ii) Σ  iii) Σ  iv) Λ  v) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \overset{(e^x:\uparrow)}{\Leftrightarrow} e^{x_1+2} < e^{x_2+2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Οπότε η $f$ είναι γν. αύξουσα, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Επίσης η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.
Συνεπώς $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$.

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+2} = y \overset{y>0}{\Leftrightarrow} x + 2 = \ell n y \Leftrightarrow x = \ell n y - 2$.
Άρα $f^{-1}(x) = \ell n x - 2$ , $x > 0$.

**Β2.** $D_{f^{-1}\circ g} = \left\{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_{f^{-1}}\right\} = \left\{x \geq 1 \,/\, \sqrt{x-1} > 0\right\} = (1,+\infty)$

$\left(f^{-1}\circ g\right)(x) = f^{-1}\left(g(x)\right) = f^{-1}\left(\sqrt{x-1}\right) = \ell n\left(\sqrt{x-1}\right) - 2$.

**Β3.** $D_h = (1,+\infty) = D_{f^{-1}\circ g}$.
Για κάθε $x \in (1,+\infty)$:

$\left(f^{-1}\circ g\right)(x) = \ell n\left(\sqrt{x-1}\right) - 2 = \ell n(x-1)^{\frac{1}{2}} - 2 = \dfrac{1}{2}\ell n(x-1) - 2 = \dfrac{\ell n(x-1) - 4}{2} = h(x)$.

Άρα $f^{-1}\circ g = h$.

**Β4. i)** Είναι $\lim\limits_{x\to-2}\left(f(x)-1\right) = 0$.
Για $x$ κοντά στο $-2$ έχουμε:

$\left|\left(f(x)-1\right)\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)-1}\right| = \left|\left(f(x)-1\right)\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)-1}\right| \leq \left|\left(f(x)-1\right)\right|\cdot 1 = \left|\left(f(x)-1\right)\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\left|\left(f(x)-1\right)\right| \le \left(f(x)-1\right)\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{f(x)-1} \le \left|\left(f(x)-1\right)\right|.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to -2}\left(-\left|f(x)-1\right|\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left|f(x)-1\right|=0$.

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to -2}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{f(x)-1}\right)=0$.

**ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-1}\right)\overset{(x\to+\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}\cdot\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=(+\infty)\cdot\sqrt{1-0}\cdot\sqrt{1-0}=+\infty.$$

## <u>ΘΕΜΑ Γ</u>

**Γ1.** Η $f$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, οπότε $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{(x-2)\cdot f(x)+\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$, για $x$ κοντά στο 2 (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=-1$.

$$(1)\Leftrightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-4\right)g(x)-\eta\mu(x-2)}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}g(x)-\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}=(x+2)g(x)-\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \text{ οπότε}$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left((x+2)g(x)-\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\right)=4\cdot(-1)-1=-5.$$

Η $f$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και $f\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η $f$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f\left(2\right)=-5<0$, ισχύει $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Γ2.** $\dfrac{1}{x_0-1}+\dfrac{1}{x_0-2}=\dfrac{2024}{f\left(x_0\right)}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \dfrac{(x_0-2)f(x_0)+(x_0-1)f(x_0)-2024(x_0-1)(x_0-2)}{f(x_0)(x_0-1)(x_0-2)}=0$

Θέτουμε $h(x)=(x-2)f(x)+(x-1)f(x)-2024(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$

Η *h* είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών και

$h(1)=-f(1)>0$, $h(2)=f(2)<0$, οπότε $h(1)h(2)<0$.

Από θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

**Γ3.** Για $x=1$ έχουμε: $f^2\left(1\right)+f\left(1\right)=2\Leftrightarrow f^2\left(1\right)+f\left(1\right)-2=0\Leftrightarrow ...f(1)=1$ ή $f(1)=-2$.

Αλλά απ' το Γ1. έχουμε ότι $f(1)<0$, άρα $f(1)=-2$.

**Γ4.** Η συνάρτηση $f^2(x)+f(x^2)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και η $2x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, οπότε η δοσμένη ισότητα γίνεται: $\left(f^2(x)+f(x^2)\right)'=\left(2x^2\right)'\Rightarrow 2f(x)f'(x)+2xf'(x^2)=4x$.

Για $x=1$ έχουμε: $2f(1)f'(1)+2f'\left(1\right)=4\overset{f(1)=-2}{\Leftrightarrow}f'\left(1\right)=-2$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+2=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x$.

**<u>ΘΕΜΑ Δ</u>**

**Δ1.** Αφού η εφαπτόμενη της $C_f$ στο $\mathrm{A}\big(0, f(0)\big)$ είναι η ευθεία (ε): $y = 2x+1$ έχουμε $f(0) = y = 2\cdot 0+1 = 1$ και $f'(0) = \lambda_\varepsilon = 2$.

Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-1}{x} \overset{(x<0)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 2$.

**Δ2.** $f^2(x) - 4xf(x) = e^{2x} - 2xe^x - 3x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = e^{2x} - 2xe^x - 3x^2 + 4x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = e^{2x} - 2xe^x + x^2 \Leftrightarrow \big(f(x)-2x\big)^2 = \big(e^x - x\big)^2$ (1)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x > x$ οπότε $e^x - x \neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x) - 2x \neq 0$.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)-2x$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επίσης για $x=0$ είναι $f(0) - 2\cdot 0 = 1 > 0$. Άρα $f(x) - 2x > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(1) $\overset{\substack{f(x)-2x>0 \\ e^x-x>0}}{\Leftrightarrow} f(x) - 2x = e^x - x \Leftrightarrow f(x) = e^x + x$.

Η $g$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε:

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\big(\kappa - \ell n(x^2+1)\big) = 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

**Δ3.** Είναι $g(x) = \begin{cases} e^x + x, & x\le 0 \\ 1-\ell\mathrm{n}(x^2+1), & x>0 \end{cases}$.

**i)** Για $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ (1) $\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

Επομένως η $g$ είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Επίσης η $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ως άθροισμα συνεχών, άρα

$g\big((-\infty,0]\big) = \Big(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(0)\Big] = (-\infty, 1]$.

Για $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2 \Leftrightarrow {x_1}^2 + 1 < {x_2}^2 + 1 \overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell n\big({x_1}^2+1\big) < \ell n\big({x_2}^2+1\big) \Leftrightarrow$

$-\ell n\big({x_1}^2+1\big) > -\ell n\big({x_2}^2+1\big) \Leftrightarrow 1-\ell n\big({x_1}^2+1\big) > 1-\ell n\big({x_2}^2+1\big) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Επομένως η $g$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης η $g$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών, άρα

$\big(g(0,+\infty)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\Big) = (-\infty, 1)$.

**ii)** Το $0 \in g\big((-\infty,0]\big) = (-\infty,1]$ και $g(0) = 1 \neq 0$ άρα υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε: $g(x_1) = 0$.

Το $0 \in \big(g(0,+\infty)\big) = (-\infty, 1)$ άρα υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $x_2 \in (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε: $g(x_2) = 0$.

**Δ4.** Η $g$ είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $[x_1, 0]$ οπότε $g\big([x_1,0]\big) = \big[g(x_1), g(0)\big] = [0,1]$.

Επίσης η $g$ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο $(0, x_2]$ οπότε $g\big((0,x_2]\big) = \Big[g(x_2), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\Big) = [0,1)$.

Επομένως για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in [x_1, x_2]$, ισχύει:

$0 \le g(\alpha) \le 1$ (1) και

$0 \le g(\beta) \le 1 \Rightarrow 0 \le 2g(\beta) \le 2 \quad (2)$

(1)+(2) $\Rightarrow 0 \le g(\alpha) + 2g(\beta) \le 3 \Rightarrow 0 \le \dfrac{g(\alpha)+2g(\beta)}{3} \le 1$.