ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΜΠΑΖΙΝΗ ΜΑΙΡΗ
ΦΟΥΡΤΟΥΝΗ ΜΑΡΙΑΝΝΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 69

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 63

Α3. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε ισοδύναμα αφού και τα δύο μέλη είναι θετικά : $2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2^2 < \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 4 < 5$, που ισχύει.

Β2. $(2-\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$

Ομοίως :$(2+\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$

Β3. Ισχύει$\sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| + |2+\sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

λόγω ερωτημάτων Β1 και Β2 και αφού $2-\sqrt{5} < 0 \; και \; 2+\sqrt{5} > 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) $K \geq \Lambda \;\Leftrightarrow\; K - \Lambda \geq 0 \;\Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow\; \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

β) $K = \Lambda \;\Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \;\Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha-\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \; και \; \alpha - \beta = 0 \;\;\Leftrightarrow \alpha = \beta \;\;\Leftrightarrow \beta = 0.$

Γ2. α) $2 \leq \alpha \leq 4 \;\; (1) \quad και \quad -4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow\; -8 \leq 2\beta \leq -6 \;\; (2)$

Προσθέτοντας τις $(1) \; και \; (2) \; έχουμε - 6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2$

β) $-4 \leq \beta \leq -3 \;\;\Leftrightarrow 4 \geq\; -\beta \geq 3 \;\;\Leftrightarrow 3 \leq -\beta \leq 4 \; (3)$

Προσθέτοντας τις $(1) \; και \; (3) \; έχουμε \; 5 \leq \alpha - \beta \leq 8$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $B=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}$

$\Rightarrow B=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 \Rightarrow B=2$

Δ2. Για $B=2$ προκύπτει: $d(x,2)\leq 1 \Rightarrow |x-2|\leq 1$

Γεωμετρικά, η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι η απόσταση μεταξύ των αριθμών x και 2 είναι μικρότερη ή ίση του 1.

Έχουμε:$|x-2|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x-2\leq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq 3$

Δ3. Έχουμε : $A=\sqrt[4]{(x-1)^4}-\sqrt{y^2-8y+16}=|x-1|-\sqrt{(y-4)^2}=|x-1|-|y-4|$

Ισχύει : $1\leq x\leq 3 \Rightarrow x-1\geq 0$ και $4\geq y\geq 2 \Rightarrow y-4\leq 0$

Επομένως : $A=x-1-[-(y-4)]=x-1+y-4 \Rightarrow A=x+y-5$

Δ4. $|A|\leq 2 \Leftrightarrow |x+y-5|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x+y-5\leq 2 \Leftrightarrow 3\leq x+y\leq 7$

Αρκεί να δείξουμε την παραπάνω σχέση.

Έχουμε: $\begin{matrix} 1\leq x\leq 3 \\ 2\leq y\leq 4 \end{matrix} \Rightarrow\ 3\leq x+y\leq 7$ προσθέτοντας κατά μέλη, άρα ισχύει το ζητούμενο.