ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΦΟΥΡΤΟΥΝΗ ΜΑΡΙΑΝΝΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο σελ. 31 και σελ. 33.

Α2. α) Λ - β) Σ - γ) Λ - δ) Λ - ε) Λ

Α3. Σχολ. βιβλίο σελ. 60

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η τελική πλευρά της γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M\left(x,\frac{1}{2}\right)$. Επομένως η προβολή του Μ ως προς τον άξονα y είναι ίση με το ημίτονο της γωνίας θ. Άρα $\eta\mu\theta=\frac{1}{2}$.

Β2. $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 => \sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\eta\mu^2\theta => \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{3}{4} => \sigma\upsilon\nu\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Επειδή $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta<0$ και άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\varphi\theta=\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}=-\sqrt{3}$.

Β3. $\eta\mu\theta=\frac{1}{2}$ $\kappa\alpha\iota$ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Β4. $\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu(7\pi+\theta)=\sigma\upsilon\nu(6\pi+\pi+\theta)=\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A\left(5,-\frac{9}{5}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $B\left(10,-\frac{29}{10}\right)$.

Επομένως $f(5)=-\frac{9}{5} => 2a+\frac{\beta}{5}=-\frac{9}{5}$ $\kappa\alpha\iota$ $f(10)=-\frac{29}{10} => 3a+\frac{\beta}{10}=-\frac{29}{10}$

Από τις δύο σχέσεις έχουμε $\begin{cases}10\alpha+\beta=-9\\30\alpha+\beta=-29\end{cases} => \begin{cases}-10\alpha-\beta=9\\30\alpha+\beta=-29\end{cases} => a=-1$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta=1$

Άρα $f(x)=-\sqrt{x-1}+\frac{1}{x}$

Γ2. Πρέπει $x-1\geq 0 => x\geq 1$ $\kappa\alpha\iota$ $x\neq 0$. Επομένως $Df=[1,+\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $x_1 < x_2 => x_1 - 1 < x_2 - 1 => \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} =>$
$-\sqrt{x_1 - 1} > -\sqrt{x_2 - 1}$ (1)

$x_1 < x_2 => \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η f $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [1,+\infty)$.

Γ3. Είναι $3 < \pi => f(3) > f(\pi)$, $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [1,+\infty)$.

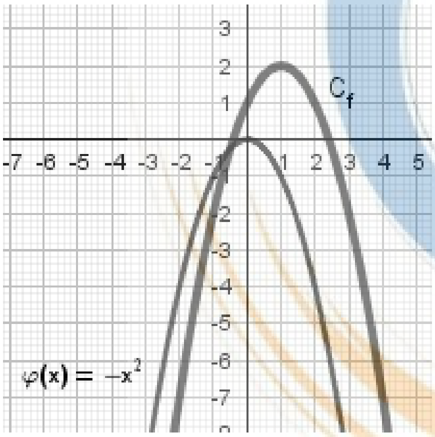
Γ4. $-2\sqrt{x-1} + \frac{2}{x} \geq -1 \quad => -\sqrt{x-1} + \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2} => f(x) \geq f(2) => x \leq 2$,
αφού η f $\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$.

Επειδή $x \in [1,+\infty)$ $\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}\ x \in [1,2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 2x - 1 + 1 + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -(x-1)^2 + 2$.

Η Cf προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $C\varphi$ κατά 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη κατά 2 μονάδες $\pi\acute{\alpha}\nu\omega$.



Δ2. i) Η f $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ (-\infty, 1]\ \kappa\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [1,+\infty)$

ii) Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$, $\acute{\iota}\sigma o\ \mu\varepsilon\ f(1) = 2$.

iii) Το πλήθος των ριζών τις εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$ ισοδυναμεί με την εύρεση του πλήθους των κοινών σημείων της Cf με την οριζόντια ευθεία $y = \kappa$ για $\kappa < 2$.
Έτσι αν $\kappa < 2$ $\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \alpha\kappa\rho\iota\beta\acute{\omega}\varsigma\ 2\ \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha$ της Cf και της ευθείας $y = \kappa$,
άρα δύο $\lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma$ $f(x) = \kappa$.