

ΤΑΞΗ: Γ' ΕΠΑΛ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 6)

A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = (x)' = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$ σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$, τότε $f'(0) = 1$.

β) Αν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε έναν άξονα και η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t δίνεται από την παραγωγίσιμη συνάρτηση $u(t)$, τότε η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι $a(t) = u'(t)$.

γ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

(Μονάδες 6)

A4. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\left(\frac{1}{3}\right)' = \dots\dots\dots$

β) $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$, αν f, g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

γ) $(\sin x)' = \dots\dots\dots$, αν $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \lambda x - 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1 .

B1. Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

(Μονάδες 6)

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$.

(Μονάδες 6)

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -2)$. Τί γωνία σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα x' ;

(Μονάδες 7)

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > f'(1) \cdot f'(x) - f'(-1)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 4)

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot (\sqrt{x}-1)]$.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f , ως προς x , όταν $x = 2$.

(Μονάδες 7)

Γ4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλη στον άξονα x' .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + x + a}$, όπου $a > 0$ σταθερά. Ο ρυθμός μεταβολής της f , ως προς x , όταν $x = 0$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $a = 1$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(-1+h) - 2f(-1)}{h}$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 6)