ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α3. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ

Α4. α) $\left(\frac{1}{3}\right)'=0$ **β)** $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ **γ)** $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\mathrm{M}(-1,0)\in C_f \Leftrightarrow f(-1)=0 \Leftrightarrow 1-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

Β2. Για $\lambda=-1$ έχουμε $f(x)=x^2-x-2$, οπότε

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3.$$

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-1$.
Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(1,-2)$. Έχει κλίση $\lambda=f'(1)=1=\varepsilon\varphi 45^o$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y=x+\beta$ και η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x'x. Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,-2)$ επομένως για $x=1$ και $y=-2$ προκύπτει $\beta=-3$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=x-3$.

Β4. $f'(1)=1$ και $f'(-1)=-3$ οπότε έχουμε

$$f(x)>f'(1)\cdot f'(x)-f'(-1)\Leftrightarrow x^2-x-2>2x-1+3\Leftrightarrow x^2-3x-4>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-4)(x+1)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f ορίζεται όταν $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-2}{x-1}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{\sqrt{x}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με

$$f'(x)=\frac{(x-2)'(x-1)-(x-1)'(x-2)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f, ως προς x, όταν x = 2 είναι $f'(2)=\dfrac{1}{(2-1)^2}=\dfrac{1}{1^2}=1$.

Γ4. Έστω $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x. Τότε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_0-1)^2}=0 \Leftrightarrow 1=0$, άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+x+a}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+a}}\cdot\left(x^2+x+a\right)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+a}}$$

Είναι $f'(0)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{a}=1\Leftrightarrow a=1$.

Δ2. Για $a=1$ είναι $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ και $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f(-1+h)-2f(-1)}{h}=2f'(-1)=2\cdot\frac{-2+1}{2\sqrt{1-1+1}}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1.$$

Δ3. $g(0)=2$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}\neq g(0)$$

Άρα η g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Δ4. Έστω $\mathrm{M}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το ζητούμενο σημείο.

Πρέπει $f'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x_0+1}{2\sqrt{x_0{}^2+x_0+1}}=0 \Leftrightarrow 2x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=-\dfrac{1}{2}$

$$f\left(x_0\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα $\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.