ΣΑΒΒΑΤΟ 13 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να είναι η $y=-5$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ πρέπει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-5 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\alpha e^x}{1+e^x}=-5$$

$$\underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\Leftrightarrow}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\alpha e^x}{e^x}=-5 \Leftrightarrow -\alpha=-5 \Leftrightarrow \alpha=5.$$

Άρα $f(x)=\dfrac{1-5e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2. Η f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{\left(1-5e^x\right)'\left(1+e^x\right)-\left(1-5e^x\right)\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{-5e^x\left(1+e^x\right)-e^x\left(1-5e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{-5e^x-5e^{2x}-e^x+5e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{-6e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)<0 \overset{f\sigma\upsilon\nu}{\Rightarrow} f\downarrow$

Επίσης $f\left((-\infty,+\infty)\right) \underset{f\downarrow}{\overset{f\sigma\upsilon\nu}{=}} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-5,1)$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-5e^x}{1+e^x} \overset{(B1)}{=} -5$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-5e^x}{1+e^x} = \dfrac{1-5\cdot 0}{1+0} = 1$.

B3. Αφού η $f\downarrow$ τότε η f είναι «1-1», άρα υπάρχει η f^{-1} με $A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-5,1)$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1-5e^x}{1+e^x} = y \Leftrightarrow 1-5e^x = y + y\cdot e^x \Leftrightarrow$

$ye^x + 5e^x = 1-y \Leftrightarrow e^x(y+5) = 1-y \overset{y\neq-5}{\Leftrightarrow} e^x = \dfrac{1-y}{y+5} > 0$ από $A_{f^{-1}}$.

Άρα $x = \ln\left(\dfrac{1-y}{y+5}\right)$ και $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+5}\right),\ x\in(-5,1)$.

B4. $\lim\limits_{x\to1^-} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \ln\left(\dfrac{1-x}{x+5}\right) = \lim\limits_{u\to0^+} \ln u = -\infty$, γιατί:

Θέτω $\dfrac{1-x}{x+5} = u$, με $\lim\limits_{x\to1^-} u = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1-x}{x+5} = \lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{x+5}(1-x)\right) = 0^+$

αφού $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{6}$ και $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x) = 0^+$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f συνεχής για $x>0$, τότε η f συνεχής και στο 1 δηλ.

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\alpha+\ln x}{x-1} = \beta$

Θέτω $g(x) = \dfrac{\alpha+\ln x}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \beta$ κοντά στο 1.

Τότε $(x-1)g(x) = \alpha+\ln x \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)g(x)\right] = \lim\limits_{x\to1}(\alpha+\ln x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0\cdot\beta = \alpha+\ln 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=0}.$$

Επίσης $\beta = f(1) \overset{f\sigma\upsilon\nu}{=} \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} \underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 1, & x=1 \end{cases}$

Γ2. Για $x=1$:

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \underset{D-H-L}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} \underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, οπότε $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Για $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}.$$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}, & x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ -\dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$.

Γ3. Από (Γ2) έχουμε $f'(x) = \frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$ για $x \neq 1$ και $f'(1) = -\frac{1}{2}$ (1)

Γνωρίζουμε ότι $\ln x \le x-1,\ x>0$ με το "=" μόνο για x=1.

Θέτω στη θέση του $x>0$ το $\frac{1}{x}>0$ και έχουμε:

$\ln\frac{1}{x} \le \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln 1 - \ln x \le \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} - \ln x \le 0$ (2) με το "=" μόνο για x=1.

Από (1), (2): $f'(x) < 0 \overset{f\sigma\upsilon\nu}{\Rightarrow} f \downarrow$

Επειδή η f συνεχής στο A_f τότε:

$$f(A) = f\left((0,+\infty)\right) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,+\infty)$$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} \underset{D-L-H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = (-\infty)(-1) = +\infty$

Γ4. Αφού F παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ τότε $F'(x) = f(x),\ x>0$.

i) Βρίσκω την εφαπτομένη της C_F στο $(e, F(e))$

$$y - F(e) = F'(e)(x-e) \Leftrightarrow y - 0 = f(e)(x-e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e-1}(x-e).$$

ii) Αφού F παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ τότε

$$F'(x) = f(x) \underset{f\ \pi\alpha\rho/\mu\eta}{\Rightarrow} F''(x) = f'(x) < 0 \underset{\Gamma 3}{\overset{F\sigma\upsilon\nu}{\Rightarrow}} F:\ \text{κοίλη}$$

Άρα η C_F είναι «κάτω» από κάθε εφαπτομένη της με το "=" μόνο για x=e.

Άρα από Γ3 έχουμε: $F(x) \le \frac{1}{e-1}(x-e) \Leftrightarrow F(x) \le \frac{x-e}{e-1}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(x)\cdot \ln(x+1)+e^{-x}-1\geq 0$ για κάθε $x>-1$.

Θέτω $g(x)=f(x)\ln(x+1)+e^{-x}$, οπότε $g(x)\geq 0=g(0)$ για κάθε $x>-1$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,+\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τότε από Θεώρημα Fermat $g'(0)=0$.

$$g'(x)=f'(x)\ln(x+1)+f(x)\frac{1}{x+1}-e^{-x}, \quad x>-1.$$

$$g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)\ln 1+f(0)-e^{0}=0\Leftrightarrow f(0)=1.$$

Αφού f παραγωγίσιμη, τότε f συνεχής και αφού $f(x)\neq 0$, η f διατηρεί πρόσημο. Επίσης $f(0)=1>0$ και άρα $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης από υπόθεση

$$f'(x)-\frac{x}{f(x)}=0\Leftrightarrow f'(x)f(x)-x=0\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)-2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Rightarrow f^2(x)=x^2+c$$

Για $x=0\Rightarrow f^2(0)=c \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} c=1$.

Άρα $f^2(x)=x^2+1\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+1} \underset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ με $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘		↗

Η f γν. φθίνουσα για $x\in(-\infty,0]$ και γν. αύξουσα για $x\in[0,+\infty)$.

Το σημείο $(0,f(0))=(0,1)$ είναι θέση ολικού ελάχιστου.

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}>0\Rightarrow f \text{ κυρτή και } f' \nearrow$$

Δ3. Εφαρμόζω θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $\left[\frac{x}{2},x\right]$, $x>0$.

- Η f συνεχής στο $\left[\frac{x}{2},x\right]$
- Η f παρ/μη στο $\left(\frac{x}{2},x\right)$

Άρα υπάρχει $\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}=\dfrac{2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x}$.

$$\frac{x}{2}<\xi \underset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'\left(\frac{x}{2}\right)<f'(\xi)=\frac{2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$xf'\left(\frac{x}{2}\right)<2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Δ4. $E=\int_0^2 |f(x)|dx \overset{f(x)>0}{\underset{\Delta 1}{=}} \int_0^2 f(x)dx \quad (1)$

Από (Δ3): $2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)>x\cdot f'\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 2f(x)>2f\left(\frac{x}{2}\right)+xf'\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)>f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}xf'\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx>\int_0^2\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}xf'\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} E>\int_0^2\left(xf\left(\frac{x}{2}\right)\right)'dx \Leftrightarrow E>\left[xf\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 \Leftrightarrow E>2f(1)-0 \Leftrightarrow E>2\cdot\sqrt{2}\ .$$