

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:** ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

**A3.** Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης  $f$  ;

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας δίπλα από κάθε μία τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $v \in \mathbb{N}$

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

**γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$ , με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μόνο μια θέση ολικού ελαχίστου.

**δ)** Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$ .

**ε)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$  τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = -G(\alpha) + G(\beta)$ .

Μονάδες 10

## ΑΡΕΙΤΟΛΑΜΟ

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1 - \alpha e^x}{1 + e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ .

**B1.** Αν η ευθεία  $y = -5$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  να δείξετε ότι  $\alpha = 5$ .

Μονάδες 6

**B2.** Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της  $f$ .

Μονάδες 7

**B3.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

Μονάδες 7

**B4.** Αν  $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+5}\right)$ ,  $x \in (-5,1)$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x)$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha + \ln x}{x-1}, & x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ \beta, & x = 1 \end{cases}$  η οποία είναι συνεχής και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδειχθεί ότι  $\alpha=0$  και  $\beta=1$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρεθεί η  $f'$  όπου ορίζεται.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρεθεί η μονοτονία της  $f$  και το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Έστω  $F$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $(0,+\infty)$  με  $F(e)=0$ .

**i)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $F(x)$  στο  $e$ . (μον. 3)

**ii)** Να αποδειχθεί ότι  $F(x) \leq \frac{x-e}{e-1}$ ,  $x > 0$ . (μον. 4)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με:

- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \cdot \ln(x+1) + e^{-x} \geq 1$  για κάθε  $x > -1$
- $f'(x) - \frac{x}{f(x)} = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(0)=1$  (μον. 2),  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (μον. 2) και  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (μον. 3).

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε τη μονοτονία και την κυρτότητα της  $f$ .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να δείξετε ότι  $2f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) > x \cdot f'\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , τους άξονες  $x'$ ,  $y'$  και την ευθεία  $x=2$ , τότε να δείξετε ότι  $E > 2\sqrt{2}$ .

**Μονάδες 7**

**Σας ευχόμαστε επιτυχία!!**