ΣΑΒΒΑΤΟ 6 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝ. Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η απόδειξη βρίσκεται στη σελίδα 83 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Λ – Λ – Σ – Σ – Λ

ΘΕΜΑ Β

α) Για την παραβολή $x^2 = 12y$ ή $x^2 = 2 \cdot 6y$ το $p = 6$, άρα η εστία της είναι το $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0,3)$.

Το σημείο $(x_0, 3)$ ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$x_0^2 = 12 \cdot 3 \text{ ή } x_0^2 = 36 \text{ ή } (x_0 = 6 \text{ ή } x_0 = -6)$$

Επομένως $A(6,3)$ και $B(-6,3)$ είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

Για την (ε_1) με σημείο επαφής το $A(6,3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Α και $p = 6$:

$$6x = 6(y+3) \text{ ή } 6x = 6y + 18 \text{ ή } x = y + 3 \text{ ή } y = x - 3$$

Για την (ε_2) με σημείο επαφής το $B(-6,3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Β και $p = 6$:

$$-6x = 6(y+3) \text{ ή } -6x = 6y + 18 \text{ ή } -x = y + 3 \text{ ή } y = -x - 3$$

γ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ε_1): $y = x - 3$ και (ε_2): $y = -x - 3$ λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -3 = x - 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το σημείο $(0, -3)$.

ΘΕΜΑ Γ

α) Έχουμε την εξίσωση: (2λ+1)x – (λ – 2)y + λ – 7 = 0 (Ε), $\lambda \in \mathbb{R}$ που είναι της μορφής

Αx + Βy + Γ = 0, με Α = 2λ +1 και Β = λ – 2.

Οπότε: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι Α ≠ 0 ή Β ≠ 0,

επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: 2λx + x - λy + 2y + λ – 7 = 0 ή

(2x – y + 1)λ + (x + 2y – 7) = 0. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 4x + 2 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο Μ(1, 3).

γ) Εφόσον ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία (ζ) η ακτίνα του R θα ισούται με την απόσταση του Μ από την ευθεία (ζ).

$d(M,\zeta) = \dfrac{|6\cdot 1 - 8\cdot 3 + 3|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2} = R$, άρα η εξίσωση του κύκλου θα είναι η:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon) = \dfrac{|2\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|6|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} = \rho$ και αφού $d(K,\varepsilon) > \rho$ ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta = -2$. Έτσι $(\eta): y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$$d(K,\eta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot(-3) - \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta| = 5 \Leftrightarrow$$

$$1 - \beta = 5 \quad ή \quad 1 - \beta = -5 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = -4 \quad ή \quad \beta = 6$$

Συνεπώς έχουμε δύο εφαπτομένες τις $\eta_1 : 2x+y+4=0$ και $\eta_2 : 2x+y-6=0$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

δ) Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $\mathrm{K}(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη (η_3) ως παράλληλη στις $(\eta_1),(\eta_2)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\eta_3}=-2$.

Τελικά η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η $(\eta_3): y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.