ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΜΑΡΤΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α3. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ

Α4. α) 0

β) $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

γ) $-\frac{1}{x^2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2x+6}{3}$. Ο ρυθμός μεταβολής της f, ως προς x, όταν $x=3$ είναι $f'(3)=4$.

Β2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=3$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(3)=4$. Άρα είναι ευθεία της μορφής $y=4x+\beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $(3, f(3))$ θα ισχύει $f(3)=4\cdot 3+\beta \Leftrightarrow 9=12+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$.
Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=4x-3$.

Β3. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+6}{3}\geq 0 \Leftrightarrow 2x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-3\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-3,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=-3$, το $f\left(-3\right)=-3$.

Β4. $t_1 = f'\left(-2\right)=\dfrac{2}{3}$, $t_2 = f'\left(1\right)=\dfrac{8}{3}$, $t_3 = f'\left(2\right)=\dfrac{10}{3}$, $t_4 = f'\left(3\right)=4=\dfrac{12}{3}$, $t_5 = f\left(1\right)=\dfrac{7}{3}$ και $t_6 = f\left(2\right)=\dfrac{16}{3}$.

Σε αύξουσα σειρά οι τιμές είναι: $\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{12}{3}, \dfrac{16}{3}$ και επομένως η διάμεσος είναι

$$\delta=\frac{\frac{8}{3}+\frac{10}{3}}{2}=\frac{\frac{18}{3}}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Οι κλάσεις έχουν κεντρικές τιμές $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5,\ x_4=7$.

Ισχύει ότι $f_2=\dfrac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow \nu=\dfrac{\nu_2}{f_2}=\dfrac{40}{0,40}=100$ και έτσι προκύπτουν οι σχέσεις:

- $\nu_1+40+25+\nu_4=100 \Leftrightarrow \nu_1+\nu_4=35$ (1)
- $\overline{x}=4 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{100}=4 \Leftrightarrow 1\cdot\nu_1+3\cdot 40+5\cdot 25+7\cdot\nu_4=400 \Leftrightarrow \nu_1+7\nu_4=155$ (2)

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και προκύπτει:

$$\begin{cases}\nu_1+\nu_4=35\\ \nu_1+7\nu_4=155\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu_1=35-\nu_4\\ 35-\nu_4+7\nu_4=155\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu_1=35-\nu_4\\ 6\nu_4=120\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu_1=15\\ \nu_4=20\end{cases}$$

Γ2. Έχουμε $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_i}{\nu}$. Ο πίνακας της άσκησης συμπληρωμένος κατάλληλα γίνεται:

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$x_i-\overline{x}$	$\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\nu_i$
[0,2)	1	15	0,15	-3	9	135
[2,4)	3	40	0,40	-1	1	40
[4,6)	5	25	0,25	1	1	25
[6,8)	7	20	0,20	3	9	180
Σύνολο		100	1			380

Η διακύμανση της μεταβλητής του προβλήματος είναι $s^2=\dfrac{380}{100}$.

Γ3. Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{380}{100}}=\dfrac{\sqrt{380}}{\sqrt{100}}=\dfrac{19,49}{10}$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{\frac{19,49}{10}}{4}=\dfrac{19,49}{40}>\dfrac{10}{40}=\dfrac{1}{4}=0,25$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. Στην κλάση [2,4) υποθέτουμε ότι οι 40 μαθητές κατανέμονται ομοιόμορφα, επομένως σε καθένα από τα διαστήματα [2,3) και [3,4) ανήκει ένα 20% των συνολικών μαθητών. Επομένως τουλάχιστον 3 ώρες αθλείται το 20% + 25% + 20% = 65% των μαθητών.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Αφού g συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$. Επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)\Leftrightarrow a=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=2.$$

Δ2. Έχουμε $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=2\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)'=2\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

- $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\geq 0\Leftrightarrow 2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$.

Το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

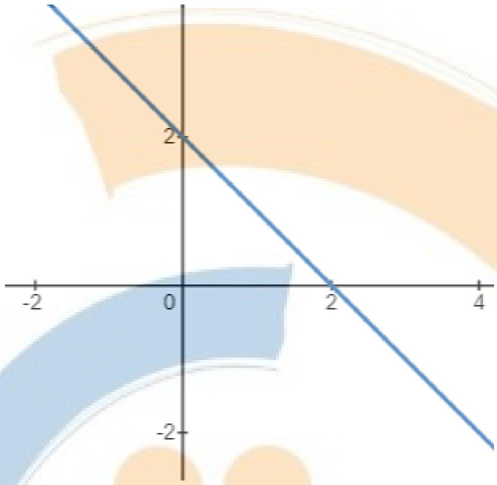
Η f έχει ελάχιστη τιμή $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1}=2\sqrt{\dfrac{3}{4}}=2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Δ3. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+f(h)-\big(f(1)+f(0)\big)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(1)+f'(0)=1-1=0.$$

Δ4. Είναι $f'(0) = -1$ και $f(0) = 2$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Μ(0,2) έχει εξίσωση της μορφής $y = -x + \beta$. Αφού διέρχεται από το Μ(0,2) έχουμε $\beta = 2$. Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -x + 2$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με βάση και ύψος 2 μονάδες. Το εμβαδόν του είναι 2 τετραγωνικές μονάδες.