ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 161.
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 76.
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 51.
Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

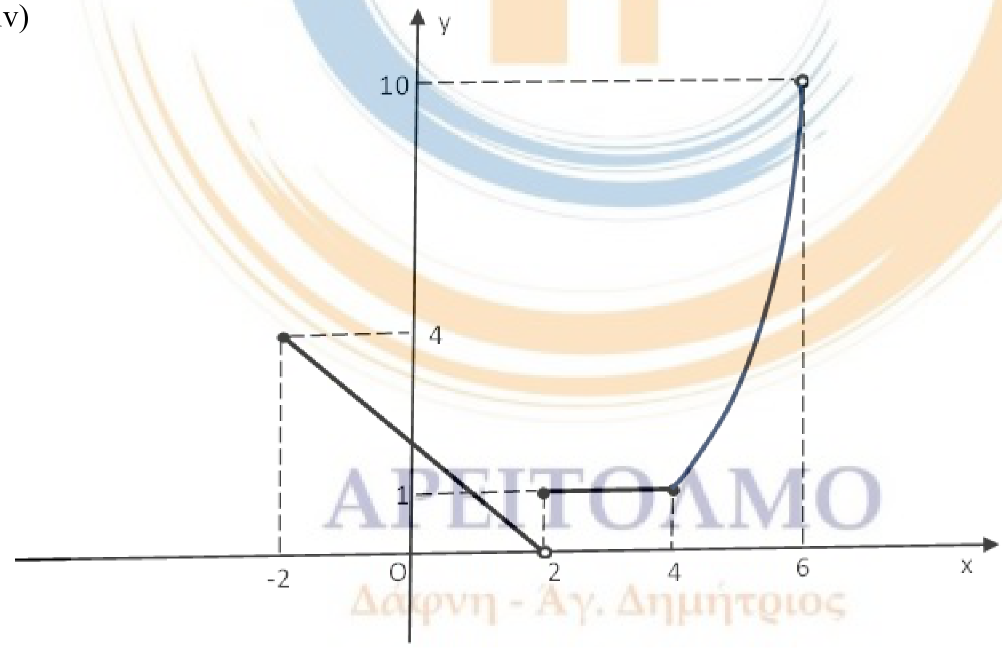
ΘΕΜΑ Β

Β1. i) $A_f = [-2,6)$ και $f(A) = [-4,0) \cup [1,10)$.

ii) $f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1$, οπότε $x \in [-2,2)$.

iii) Η f δεν είναι αντιστρέψιμη, αφού για $2 \neq 4$ είναι $f(2) = f(4) = 1$.

iv)



Β2. i) $\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{x\to 6^-} f(x) = 10$.

ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

iii) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, γιατί $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για x κοντά στο 2, με $x < 2$.

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(f(x)\right) \underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to -2^+}}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim\limits_{u\to -2^+} f(u) = -4$.

Β3. • Για $-2 \le x < 2$ η C_f είναι ευθ. τμήμα, έστω με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$. Τα σημεία $(-2,-4)$ και $(0,-2)$ ανήκουν στο ευθ. τμήμα, οπότε $-4=\lambda(-2)+\beta$ και $-2=\lambda\cdot 0+\beta$. Επομένως η εξίσωση του ευθ. τμήματος είναι $y=x-2$.

• Για $2\le x<4$ η C_f είναι ευθ. τμήμα παράλληλο με τον άξονα $x'x$ και το σημείο $(2,1)$ ανήκει στο ευθ. τμήμα, οπότε η εξίσωση του ευθ. τμήματος είναι $y=1$.

• Για $4\le x<6$ είναι $f(x)=g(x)=x^2+\alpha x+9$ και το σημείο $(4,1)$ ανήκει στη C_f, οπότε $f(4)=1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha=-6$. Επομένως $f(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$.

Β4. $\mathrm{I}=\int_0^1 f(x)\cdot e^x dx=\int_0^1 (x-2)\cdot e^x dx=\int_0^1 (x-2)\cdot (e^x)' dx=\left[(x-2)\cdot e^x\right]_0^1-\int_0^1 (x-2)'\cdot e^x dx=$

$=2-e-\int_0^1 e^x dx=2-e-\left[e^x\right]_0^1=2-e-e+1=3-2e$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $h'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)-1=e^{g(x)}\cdot e^{-g(x)}-1=1-1=0$

Επομένως η h είναι σταθερή στο $(-1,+\infty)$.

Επίσης, αφού η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι $g(0)=0$, οπότε $h(0)=e^{g(0)}-0=1$. Επομένως $h(x)=1$, $x\in(-1,+\infty)$.

Άρα για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $h(x)=1 \Leftrightarrow e^{g(x)}-x=1 \Leftrightarrow e^{g(x)}=x+1 \Leftrightarrow g(x)=\ell n(x+1)$.

Γ2. Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι:

$$f(x)-f'(x)=g(x)-g'(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=f'(x)-g'(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=\left(f(x)-g(x)\right)',$$

οπότε $f(x)-g(x)=c\cdot e^x$.

Για $x=0$: $f(0)-g(0)=c\cdot e^0 \Leftrightarrow -1-0=c \Leftrightarrow c=-1$, επομένως

$f(x)-g(x)=-e^x \Leftrightarrow f(x)=g(x)-e^x \Leftrightarrow f(x)=\ell n(x+1)-e^x$, $x\in(-1,+\infty)$.

Γ3. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-e^x$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

Επομένως η f' είναι γν. φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$. Επομένως

$x<0 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και

$x>0 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0$.

x	-1 0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(-1,0]$,

γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολ. μέγιστο στο 0, ίσο με $f(0)=-1$.

Γ4. • Αν $x \le -1$, τότε $x+1 \le 0$ και $e^{e^x} > 0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
• Αν $x > -1$, τότε έχουμε:
$x+1 = e^{e^x} \Leftrightarrow \ell n(x+1) = \ell n e^{e^x} \Leftrightarrow \ell n(x+1) = e^x \Leftrightarrow \ell n(x+1) - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, η οποία είναι αδύνατη αφού η f παρουσιάζει ολ. μέγιστο ίσο με $f(0) = -1$ (από το Γ3.).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x) - x^2}{x-1}$ (1), για x κοντά στο 1. Είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -3$.
(1) $\Leftrightarrow f(x) = (x-1)\cdot g(x) + x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x) + x^2\right] = 1$ και επειδή η f συνεχής ως παραγωγίσιμη έχουμε $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot g(x) + x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(g(x) + x + 1\right) =$$

$= -3 + 1 + 1 = -1$.
Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1,1)$ είναι η
$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$.
Δ2. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της.
Δηλαδή $f(x) \ge -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x+2) = +\infty$.
Άρα $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε οι πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι τα σημεία που μηδενίζεται η f'.
Η f συνεχής στο $[1,3]$ ως παραγωγίσιμη και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ από υπόθεση.
Επίσης $f(1) = f(3) = 1$.
Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
Επίσης η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και επομένως η f' είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα της f' στο $\mathbb{R}$.

$x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
$x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, x_o]$, γν. αύξουσα στο $[x_o, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0.
Δ4. Η f' είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και έχουμε:
$f'\left(2xf'(x) + x^2 + 1\right) = f'\left(2f'(x) + 2x\right) \Leftrightarrow 2xf'(x) + x^2 + 1 = 2f'(x) + 2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2xf'(x) - 2f'(x) + x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)(x-1) + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)\left(2f'(x) + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $2f'(x) + x - 1 = 0$.

Οπότε η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $2f'(x)+x-1=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,x_0]$.

Θέτουμε $h(x)=2f'(x)+x-1$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,x_0]$ ως πράξεις συνεχών και $h(1)=2f'(1)=-2<0$ και $h(x_0)=2f'(x_0)+x_0-1=x_0-1>0$, αφού $x_0\in(1,3)$.

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,x_0)$.

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,x_0]$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $h'(x)=2f''(x)+1>0$, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.