

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να γράψετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών:

«Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.»

Μονάδες 7

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο απαντήσεων, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f και g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ ισχύει: $f \circ g = g \circ f$

β) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ) Αν ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους y ως προς ένα μέγεθος x είναι θετικός, τότε το μέγεθος y αυξάνεται.

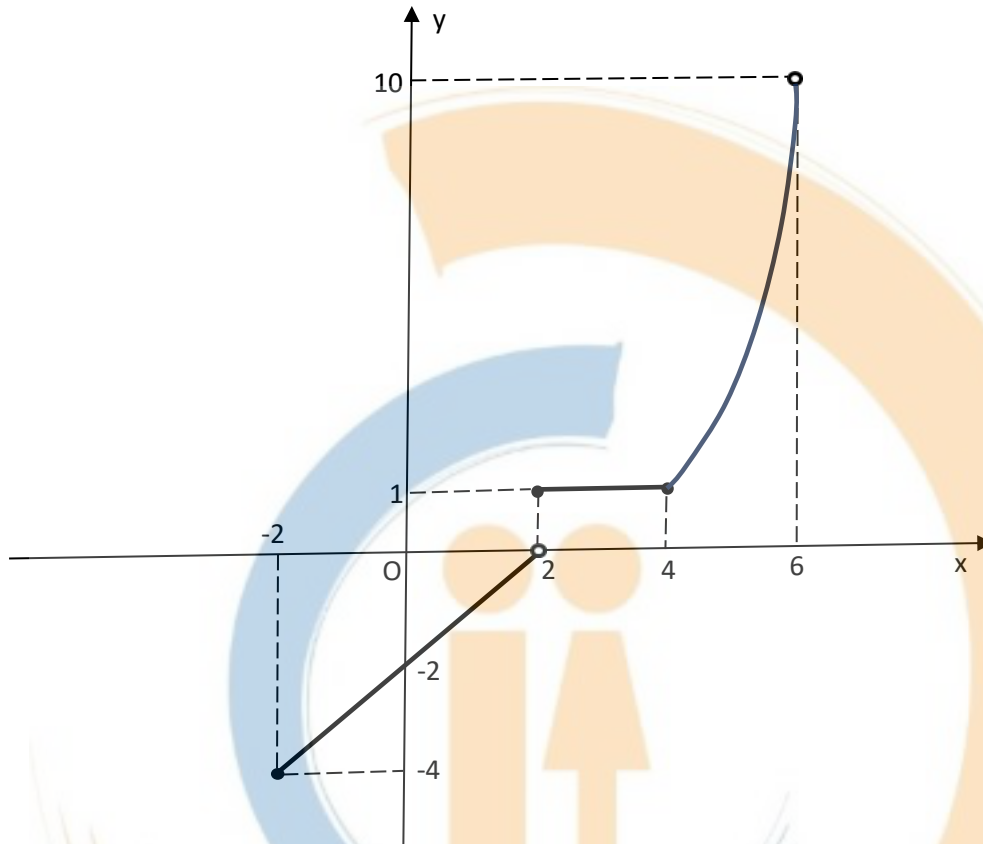
δ) Για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} (-f(x))dx$.

ε) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα ερωτήματα που ακολουθούν να απαντήσετε χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που σας δίνει η γραφική παράσταση, όπου αυτό χρειάζεται.



- B1.** i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - 1 < 0$.
 iii) Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$

Μονάδες 8

B3. Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [4, 6)$, όπου $g(x) = x^2 + ax + 9$, $a \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & -2 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < 4 \\ (x - 3)^2, & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) \cdot e^x dx$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

- $g'(x) = e^{-g(x)}$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$
- η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- $f(x) - f'(x) = g(x) - g'(x)$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$
- $f(0) = -1$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{g(x)} - x$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $g(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x+1) - e^x$, $x \in (-1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x+1 = e^{e^x}$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

- $f(3) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = -3$
- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1) = 1$ και $f'(1) = -1$. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο σε σημείο $x_0 \in (1, 3)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(2xf'(x) + x^2 + 1) = f'(2f'(x) + 2x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $[1, x_0]$, όπου x_0 η θέση ακροτάτου της f .

Μονάδες 7

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!