ΣΑΒΒΑΤΟ 17 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

ΘΕΜΑ Α

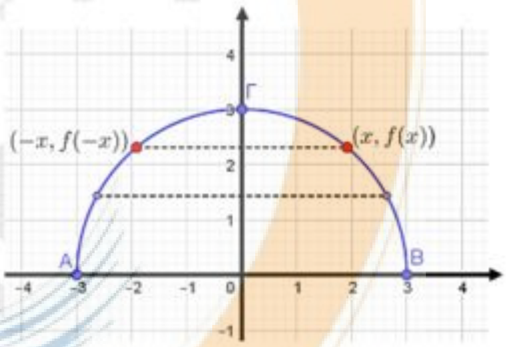
Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 134

Α2. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από -3 έως 3. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα Δ=[-3, 3].

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.
Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

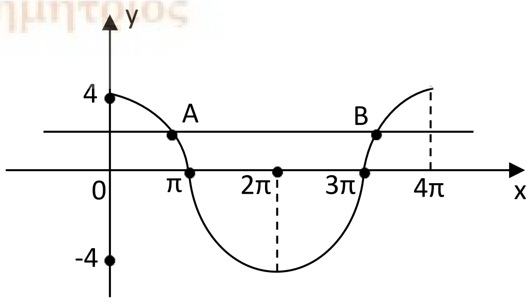


γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η $x = 0$. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι $x = 3$ και $x = -3$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $MAX_f = |8\alpha| = 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 8\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$.

Γ2. Για $\alpha = \dfrac{1}{2}$ έχουμε $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ3. $f(x)=2 \Leftrightarrow 8\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}x=2 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

- $\frac{x}{2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=4\kappa\pi+\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$
- $\frac{x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=4\kappa\pi-\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Όμως $x\in[0,4\pi]$ άρα:

- $0\le 4\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le 12\kappa\pi+2\pi\le 12\pi \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -2\pi\le 125\pi\le 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{5}{6} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa=0$, άρα $x=\frac{2\pi}{3}$
- $0\le 4\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le 12\kappa\pi-2\pi\le 12\pi \Leftrightarrow 2\pi\le 12\kappa\pi\le 14\pi \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{7}{6} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa=1$ άρα $x=4\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

α) Η διαίρεση $P(x):(x^2-4)$ φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{array}{r|l}
x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ \cline{2-2}
-x^5+4x^3 & x^3-1 \\ \cline{1-1}
-x^2+\alpha x+\beta & \\
x^2 \qquad -4 & \\ \cline{1-1}
\alpha x+\beta-4 &
\end{array}
$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x+\beta-4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x+1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x+\beta-4$ και $4x+1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=5$.

γ) Για $\alpha=4$ και $\beta=5$ έχουμε $P(x)=x^5-4x^3-x^2+4x+5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι $P(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε

$$P(x)<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)<0.$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x)=(x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$\Pi(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$.