

ΤΑΞΗ: Γ' ΕΠΑΛ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(Μονάδες 5)

A2. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n φυσικοί και μη μηδενικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i της τιμής x_i με $i = 1, 2, \dots, k$;

β. Να αποδείξετε ότι $0 \leq f_i \leq 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

(Μονάδες 3+3+4 = 10)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποσοτικής μεταβλητής.

β. Για μία ποιοτική μεταβλητή έχει νόημα ο υπολογισμός αθροιστικών συχνοτήτων.

γ. Οι κεντρικές τιμές δύο διαδοχικών κλάσεων απέχουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος των κλάσεων.

δ. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in (a, \beta)$ και $f'(x) > 0$ στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

ε. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, με $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt{l}.$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάσαμε ένα δείγμα 50 οικογενειών ως προς τα λίτρα νερού που καταναλώνουν ημερησίως. Τα αποτελέσματα έχουν ομαδοποιηθεί στον ακόλουθο πίνακα:

Λίτρα νερού	Πλήθος οικογενειών n_i
[20,60)	2
[60,100)	5
[100,140)	15
[140,180)	20
[180,220)	8
Σύνολο:	50

B1. Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών) για τα δεδομένα του προβλήματος.

(Μονάδες 10)

B2. Να βρείτε το ποσοστό επί τοις εκατό των οικογενειών που καταναλώνουν:

- i) λιγότερα από 100 λίτρα νερού ημερησίως,
- ii) από 100 έως 180 λίτρα νερού ημερησίως.

(Μονάδες 5+5 = 10)

B3. Αν «σπάταλη» θεωρείται μία οικογένεια που καταναλώνει τουλάχιστον 200 λίτρα νερού, να βρείτε το πλήθος των «σπάταλων» οικογενειών.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά ΑΒ = x m και εμβαδόν 16 m^2 .



Γ1. Να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ του ορθογωνίου συναρτήσει του x είναι $ΒΓ = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

Γ2. Να δείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου συναρτήσει του x , δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 2x + \frac{32}{x}, \quad x > 0.$$

(Μονάδες 5)

Γ3. Για ποια τιμή του x η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη καθώς και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

(Μονάδες 8)

Γ4. Ποιο σχήμα έχει το ορθογώνιο ΑΒΓΔ όταν η περίμετρός του είναι ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 - \kappa x + 1$ με παραμέτρους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη

στην ευθεία $y = 5$ και $\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-1} - 1}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

Δ3. Αν a είναι το τοπικό μέγιστο της f και β είναι η θέση του τοπικού ελαχίστου της f , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1		$\frac{\beta}{10}$		
2				0,35
3			$3a$	
4	7			
Σύνολο:				

(Μονάδες 7)

Δ4. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο για τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα.

(Μονάδες 4)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος