ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 5 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2024

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 139

Α2. α. Ψ
β. π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 128,129

Α4. **1.** Λ **2.** Σ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή για $x \neq 2$ με πρώτη παράγωγο:
$f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$.

Β2. α. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}[(x^2+1)\frac{1}{x-2}] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}[(x^2+1)\frac{1}{x-2}] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-}[(x^2+1)\frac{1}{x-2}] = -\infty \end{cases}$. Συνεπώς δεν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$.

β. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Β3. Έστω ότι υπάρχει σημείο x_1 τέτοιο ώστε: $f'(x_1)(-1) = -1 \leftrightarrow f'(x_1) = 1 \leftrightarrow \frac{{x_1}^2-4x_1-1}{(x_1-2)^2} = 1 \leftrightarrow$ ${x_1}^2 - 4x_1 - 1 = {x_1}^2 - 4x_1 + 4 \leftrightarrow -1 = 4$ Άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

Β4. $f(x) = 3x + 2 \leftrightarrow \frac{x^2+1}{x-2} = 3x + 2 \leftrightarrow x^2 + 1 = (x-2)(3x+2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1 - (x-2)(3x+2)$ στο διάστημα [2,4].
Η g είναι συνεχής στο [2,4] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
$g(2) = 5 > 0$ *και* $g(4) = 17 - 28 = -11 < 0$, συνεπώς από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,4)$: $g(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$, x ≥ 0.
$A_{g\circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_g\} = \{x \geq 0 / (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0\} = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x\epsilon[0,1]$: $(gog)(x) = g\big(g(x)\big) = (\sqrt{x}-1)^2 - 2\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2 - 2|\sqrt{x}-1| + 1 = x.$

Γ2. Είναι $f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1,\ x \geq 0,$
Έστω $x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 < x_2 \rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \rightarrow 2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{x_2}$ (1)
$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$ (2) Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
(Ή με παραγώγους $g'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0\ \sigma\tau o\ (0,+\infty)$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$)
Για το πεδίο ορισμού της f^{-1} έχουμε:
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = [0,+\infty)$, άρα $f(A) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [1,+\infty)$.
Οπότε $A_{f^{-1}} = [1,+\infty)$.
Για τον τύπο της αντίστροφης θέτουμε

$$y = x + 2\sqrt{x} + 1 \leftrightarrow y = \left(\sqrt{x}+1\right)^2, y \geq 0 \leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \pm\sqrt{y} \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} - 1, & \Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ \sqrt{x} = -\sqrt{y} - 1, & A\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{cases}$$

Πρέπει $\sqrt{y} - 1 \geq 0 \leftrightarrow \sqrt{y} \geq 1 \leftrightarrow y \geq 1$ (και από εδώ $f(A) = [1,+\infty)$)
Οπότε, $x = \left(\sqrt{y}-1\right)^2$ με $\left(\sqrt{y}-1\right)^2 \geq 0$ που ισχύει.
Άρα, $f^{-1}(x) = (\sqrt{x}-1)^2$ με $A_{f^{-1}} = [1,+\infty)$.

Γ3. $g(x) = (\sqrt{x}-1)^2,\ \mu\varepsilon\ A_g = [0,+\infty)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$ με $A_{f^{-1}} = [1,+\infty)$
Παρατηρούμε ότι: $A_g \neq A_{f^{-1}}$ οπότε οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

Γ4. Αν $h(x) = f(x) + f^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 = 2x + 2$ και $\varphi(x) = 2e^{-x} + 4$, θεωρούμε τη συνάρτηση: $K(x) = h(x) - \varphi(x) = 2x + 2 - 2e^{-x} - 4 = -2e^{-x} + 2x - 2\ \sigma\tau o\ [1,2]$.

- Η συνάρτηση K είναι συνεχής ως πράξη συνεχών στο [1,2]
- $K(1) = -2e^{-1} < 0$
- $K(2) = -2e^{-2} + 2 = 2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) > 0$

Άρα, $K(1)K(2) < 0$, οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$: $K(x_0) = 0$.
Επίσης για $x_1 < x_2 \leftrightarrow -x_1 > -x_2 \leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \leftrightarrow -2e^{-x_1} < -2e^{-x_2}$ (3)
Και $x_1 < x_2 \leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \leftrightarrow 2x_1 - 2 < 2x_2 - 2$ (4) . Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε:
$K(x_1) < K(x_2)$ δηλαδή η K είναι γνησίως αύξουσα στο (1,2) οπότε το x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Γ5. $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}\eta\mu f(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}\eta\mu(x+2\sqrt{x}+1)\right]$
Έχουμε: $\left|\frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}\eta\mu(x+2\sqrt{x}+1)\right| \leq \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} \leftrightarrow -\frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} \leq \frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}\eta\mu(x+2\sqrt{x}+1) \leq \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}$
Όμως, $\lim_{x\to+\infty} -\frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2+\frac{1}{\sqrt{x}})} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2+\frac{1}{\sqrt{x}})} = 0$. Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}\eta\mu\left(x+2\sqrt{x}+1\right)\right] = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $g(x) = e^x\big(x - f(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x) = e^x\big(x - f(x)\big) + e^x\left(1 - f'(x)\right) = e^x\left(x - f(x) + 1 - f'(x)\right) = 0$. Άρα $g(x) = c$, $x \in$R.

Δ2. Για x=0 έχουμε: $g(0) = -f(0) = e$.
Άρα $g(x) = e \leftrightarrow e^x\big(x - f(x)\big) = e \leftrightarrow x - f(x) = \frac{e}{e^x} \leftrightarrow f(x) = x - e^{1-x}$ για κάθε $x \in$R.

Δ3. Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > 1$ και ότι $f(\alpha) = f(1)$, τότε για την f έχουμε στο διάστημα $[1,\alpha]$

- Η f είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$
- Η f παραγωγίσιμη στο $(1,\alpha)$ με $f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0$
- $f(\alpha) = f(1)$

Οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\alpha)$: $f'(x_0) = 0$ Άτοπο.
Συνεπώς $f(\alpha) \neq f(1)$.
Ομοίως για $\alpha < 1$.

Δ4. Θεωρούμε την f στο διάστημα [0,β].

- Η f είναι συνεχής στο [0,β]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,β)

Άρα από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\beta)$: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(0)}{\beta} \leftrightarrow \frac{e}{\beta} = \frac{\beta - e^{1-\beta} + e}{\beta} \leftrightarrow \beta - e^{1-\beta} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - e^{1-x}$ και παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$. Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα διότι $f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0$. (Αποδεικνύεται και κατασκευαστικά). Άρα το β=1 είναι μοναδική ρίζα.