

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:** ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και γράψτε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο απαντήσεων, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε δε μπορεί να είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

3. Για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

5. Αν για μία οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$, με $x \neq 2$.

B1. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της f .

Μονάδες 6

B2. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια: **α.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και **β.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 6

B3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει εξίσωση εφαπτομένης, κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -x$.

Μονάδες 7

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 3x + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2,4)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x + 2\sqrt{x} + 1, x \geq 0$ και $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1, x \geq 0$

Γ1. Να δείξετε ότι $(g \circ g)(x) = x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να δείξετε ότι: $f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$ με $x \geq 1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις g και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 3

Γ4. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $h(x) = f(x) + f^{-1}(x)$ και $\varphi(x) = 2e^{-x} + 4$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, 2)$.

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \eta \mu f(x) \right]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για την οποία ισχύουν:

$f'(x) + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -e$.

Δ1. Αν $g(x) = e^x(x - f(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) = x - e^{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι, για κάθε $a \neq 1$, ισχύει $f(a) \neq f(1)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού β , με $\beta > 0$ για την οποία υπάρχει $\xi \in (0, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{e}{\beta}$.

Μονάδες 7

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Δάφνη - κ. Δημήτριος