

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

A3. α)  $\wedge$  β)  $\Sigma$  γ)  $\Sigma$

A4. α)  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  β)  $c \cdot f'(x)$  γ)  $-ημx$

**ΘΕΜΑ Β**

B1.  $A(1,1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow 2 - 3a + 7 - 2 = 1 \Leftrightarrow -3a = -6 \Leftrightarrow a = 2$ .

B2. Για  $a = 2$  έχουμε  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 2$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 6x^2 - 12x + 7 = 6x^2 - 12x + 6 + 1 = 6(x^2 - 2x + 1) + 1 = 6(x-1)^2 + 1 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

B3. Έχουμε  $f(1) = 1$  και  $f'(1) = 1$ , επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A$  έχει εξίσωση της μορφής (ε):  $y = x + \beta$ . Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(1,1)$  έπεται ότι  $\beta = 0$ , συνεπώς η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε):  $y = x$ .

B4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 12x + 7 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 12x + 6}{x^2 - 1} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)}{x+1} = 0$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$ .

ισχύει ότι  $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-a}{1} = 0 \Leftrightarrow a = 1$ .

**Γ2.** Για  $a = 1$  έχουμε  $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ . Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot (x^2 - 1)}{(x^2)^2} = \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ . Άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$ . Άρα η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$ .

**Γ3.** Η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$ , οπότε έχουμε:

$$x < -1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(-1) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Γ4. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f''(x)}{f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x^4 + x^2 - 2}{x^3}}{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^2 - x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2}{x} = -3. \end{aligned}$$

#### **ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Έστω  $d > 0$  το μήκος της πλευράς ΚΛ. Έχουμε ΚΒ =  $6 - x$  και ΒΛ =  $x$ . Ως μήκη πλευρών θα πρέπει ( $x > 0$  και  $6 - x > 0$ )  $\Leftrightarrow (x > 0$  και  $x < 6)$   $\Leftrightarrow 0 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (0, 6)$ . Από Πυθαγόρειο

Θεώρημα στο τρίγωνο ΚΒΛ έχουμε:

$$\text{ΚΛ}^2 = \text{ΚΒ}^2 + \text{ΒΛ}^2 \Leftrightarrow d^2 = (6 - x)^2 + x^2 \Leftrightarrow d^2 = 36 - 12x + x^2 + x^2 \Leftrightarrow d^2 = 2x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{d > 0}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}.$$

Άρα η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος της πλευράς ΚΛ είναι η

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}, \quad x \in (0, 6).$$

**Δ2.** Το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ έχει εμβαδόν που εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = \text{ΚΛ}^2 = d^2(x) = \left(\sqrt{2x^2 - 12x + 36}\right)^2 = 2x^2 - 12x + 36, \quad x \in (0, 6).$$

Η  $E$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 6)$  με  $E'(x) = 4x - 12$ . Για  $x \in (0, 6)$  έχουμε:

- $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 12 \Leftrightarrow x \geq 3$ .
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 12 < 0 \Leftrightarrow 4x < 12 \Leftrightarrow x < 3$ .

Το πρόσημο της  $E'$  καθώς και η μονοτονία της  $E$  φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

$x$	0	3	6
$E'(x)$	-	0	+
$E(x)$	↘		↗

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ ελαχιστοποιείται όταν  $x = 3$ .

**Δ3.** Η  $E$  έχει ολικό ελάχιστο  $E(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 36 = 18$ , άρα για κάθε  $x \in (0, 6)$  ισχύει ότι  $E(x) \geq 18$ .

**Δ4.**  $d(x) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 12x + 36} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 36 = 18 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ .  
 $E'(3) = 0$ .



ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος