

ΤΑΞΗ: Γ' ΕΠΑΛ**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

(Μονάδες 6)

A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0 .

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε $(f^2(x))' = 2f(x) \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

A4. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(\sqrt[3]{x})' = \dots\dots\dots$, $x > 0$.

β) $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$, αν f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

γ) $(\sin x)' = \dots\dots\dots$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 7x - 2$, με $a \in \mathbb{R}$ σταθερά, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

B1. Να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A .

(Μονάδες 7)

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f(1)}{x^2 - 1}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{a}{x}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ1. Να δείξετε ότι $a = 1$.

(Μονάδες 7)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$ και να μελετήσετε την f' ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x < -1$.

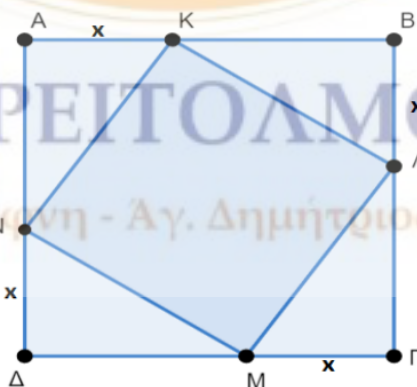
(Μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f''(x)}{f'(x)}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB = 6$. Θεωρούμε τα σημεία K , Λ , M και N στο εσωτερικό των πλευρών AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα, έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο $K\Lambda M N$.



Δ1. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το μήκος της πλευράς $K\Lambda$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ δίνεται από τον τύπο $E(x) = 2x^2 - 12x + 36$, $x \in (0, 6)$ και να βρείτε για ποια τιμή του x ελαχιστοποιείται.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να αποδείξετε ότι $E(x) \geq 18$ για κάθε $x \in (0, 6)$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(x)$, ως προς x , όταν το μήκος της πλευράς ΚΛ είναι ίσο με $3\sqrt{2}$.

(Μονάδες 7)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!



ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος