

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΣΤΑΘΗΣ ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ

**Θέμα Α**

**A1.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 43.

**A2.** i) Λ    ii) Λ    iii) Σ    iv) Λ    v) Σ

**Θέμα Β**

**B1. α)** Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δίνεται από το τύπο

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Άρα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6$ .

β)  $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$  και  $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 4^2 = 16$ .

γ)  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - 9\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 3\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 =$   
 $= 3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 3 \cdot 16 = 15.$

**B2. α)** Είναι:  $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2 \cdot (2, -1) - (-3, 2) = (4, -2) + (3, -2) = (7, -4)$ , οπότε

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (2, -1) \cdot (7, -4) = 14 + 4 = 18.$$

β) Επίσης:  $\vec{\gamma} = (x, y)$  και  $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x, y) \cdot (2, -1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow$   
 $y = 2x$  (1).

Λόγω της (1) το διάνυσμα  $\gamma$  γράφεται:  $\vec{\gamma} = (x, 2x)$ .

Έτσι το  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$   
 $x = -1$  ή  $x = 1$ .

Για  $x = -1$  το  $\vec{\gamma} = (-1, -2)$ , ενώ για  $x = 1$  το  $\vec{\gamma} = (1, 2)$ .

### Θέμα Γ

**Γ1. α)** Είναι:  $A_1(t+3, t-1)$  και  $A_2(2t, 2t-1)$ ,  $t \geq 0$ . Την χρονική στιγμή  $t=0$  έχουμε:  $A_1(3,-1)$  και  $A_2(0,-1)$ . Άρα τα αεροπλάνα δεν ξεκινούν από το ίδιο αεροδρόμιο.

**β)** Για το  $A_1$  θέτουμε  $t+3 = x$  και  $t-1 = y \Rightarrow t = x-3$  και  $t = y+1$ .

Άρα  $x-3 = y+1 \Rightarrow (\varepsilon_1): x - y - 4 = 0$ .

Για το  $A_2$  αντίστοιχα  $2t=x$  και  $2t-1=y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow (\varepsilon_2): x - y - 1 = 0$

**γ)** Το σημείο  $N(8,4)$  επαληθεύει μόνο την 1<sup>η</sup> εξίσωση, άρα το αεροπλάνο  $A_1$  βρίσκεται σε τροχιά ανεφοδιασμού.

**Γ2. i)** Επειδή το  $A$  είναι σημείο του θετικού ημιάξονα  $Oy$  και  $(OA) = 8$  θα είναι  $y_A = 8$ , επομένως  $A(0, 8)$ .

Το  $O$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$  και τα  $B$  και  $\Gamma$  είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των  $x$ , αντίστοιχα.

Επειδή  $(B\Gamma) = 12$ , θα είναι  $|x_B| = |x_\Gamma| = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{12}{2} = 6$ , επομένως  $B(-6, 0)$  και  $\Gamma(6, 0)$ .

**ii)** Οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  της πλευράς  $A\Gamma$  είναι:

$$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{0+6}{2} = 3,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{8+0}{2} = 4.$$

### Θέμα Δ

**Δ1. α)** Με  $\lambda = 1$  έχουμε  $y = x - 2 + 1 - 2 \Rightarrow y = x - 3$

ενώ με  $\lambda = 2$  έχουμε  $y = 2x - 4$ .

Οι συντεταγμένες του  $M$  προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος.

Είναι:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 3 = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Επομένως το κοινό σημείο των δυο ευθειών είναι το  $M(1, -2)$ .

**β)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του  $M$  επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με  $x = 1$  η εξίσωση γράφεται

$$y = \lambda(1 - 2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -2$$

οπότε πραγματικά κάθε ευθεία που προκύπτει από την δοσμένη εξίσωση διέρχεται από το Μ.

**Δ2. α)** Η εξίσωση (1) είναι της μορφής  $Ax + By + \Gamma = 0$ , όπου

$$A = \mu^2 - 1, \quad B = 3\mu^2 - 2\mu - 1, \quad \Gamma = -5\mu^2 + 4\mu + 1$$

Για να παριστάνει ευθεία πρέπει οι A, B να μη γίνονται ταυτόχρονα 0.

$$A = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1, \quad B = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 - 2\mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -\frac{1}{3}$$

Συνεπώς η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του  $\mu$  εκτός από την τιμή  $\mu = 1$ .

β) i. Για να είναι παράλληλη στον  $xx'$  πρέπει  $A = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1$ . Όμως η τιμή  $\mu = 1$  απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά  $\mu = -1$ .

ii. Για να είναι παράλληλη στον  $yy'$  πρέπει  $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -\frac{1}{3}$ . Όμως η τιμή

$\mu = 1$  απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά  $\mu = -\frac{1}{3}$ .



**ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ**

Δάφνη - Αγ. Δημήτριος