*ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2023*

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**
**ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

**Α.** Σχολικό βιβλίο σελ.63
**Β.** **α)** Λ
**β)** Σ
**γ)** Λ
**δ)** Σ
**ε)** Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Α.** Είναι:

$$A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

**Β.** Ισχύει ότι : $\Pi = A^2 + B^2 = (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 =$

$$4 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 4 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \quad 4 + 3 + 4 + 3 = 14$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Α.** **α)** Έχουμε: $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 & (\mathbf{1}) \\ x - 2 \leq 0 & (\mathbf{2}) \end{cases}$

Από τις σχέσεις (**1**) και (**2**) έχουμε:

$$A = \frac{|x-1|+|x-2|}{2} = \frac{x-1-(x-2)}{2} = \frac{x-1-x+2}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

**β) i)** Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \leq x \leq 2$ με 3 και βρίσκουμε:

$3 \leq 3x \leq 6$ **(1)**

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $3 \leq y \leq 5$ με $-1$ και βρίσκουμε:

$-3 \geq -y \geq -5 \Leftrightarrow -5 \leq -y \leq -3$ **(2)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις **(1)** και **(2)** και βρίσκουμε:

$$-2 \leq 3x - y \leq 3$$

**ii)** Ισχύει ότι:

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq x^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 \quad \textbf{(3)}$$

$$3 \leq y \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq -\frac{1}{5} \quad \textbf{(4)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις **(3)** και **(4)** και βρίσκουμε:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y} \leq 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{12} - \frac{4}{12} \leq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y} \leq \frac{5}{5} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y} \leq \frac{4}{5}$$

**Β. α)** $|x+2|^2 + 16 \geq 8y - y^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 16 \geq 8y - y^2 \Leftrightarrow$

$(x+2)^2 + y^2 - 8y + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 \geq 0$ , ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει όταν : $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x + 2 = 0 \quad και \quad y - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \quad και \quad y = 4$$

**β)** Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

| $x$ | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | 0 $+$ | $+$ | |
| $2-x$ | $+$ | $+$ | 0 $-$ | |

<u>1η περίπτωση:</u> Αν $x \in (-\infty, 1)$ τότε $x - 1 < 0$ και $2 - x > 0$ , άρα :

$K = |x-1| + |2-x| + 2x - 3 = -x + 1 + 2 - x + 2x - 3 = 0$

<u>2η περίπτωση:</u> Αν $x \in [1,2]$ τότε $x - 1 \geq 0$ και $2 - x \geq 0$ , άρα :

$K = |x-1| + |2-x| + 2x - 3 = x - 1 + 2 - x + 2x - 3 = 2x - 2$

<u>3η περίπτωση:</u> Αν $x \in (2, +\infty)$ τότε $x - 1 > 0$ και $2 - x < 0$ , άρα :

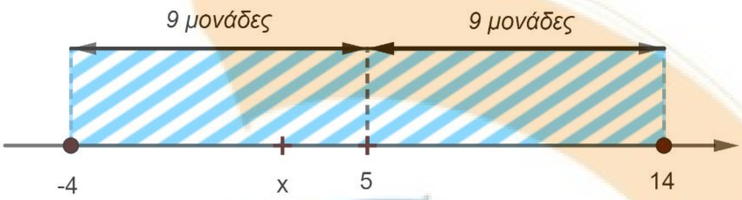
$K = |x-1| + |2-x| + 2x - 3 = x - 1 - (2 - x) + 2x - 3$

$= x - 1 - 2 + x + 2x - 3 = 4x - 6$

**<u>ΘΕΜΑ Δ</u>**

**Α.** Η απόσταση του σημείου με τετμημένη x στον άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο με τετμημένη 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.

**Β.** Από το παρακάτω σχήμα βρίσκουμε ότι: $x \in [-4,14]$ .




**Γ.** $d(x,5) \leq 9 \Leftrightarrow |x-5| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x-5 \leq 9 \Leftrightarrow -9+5 \leq x-5+5 \leq 9+5$

$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$

**Δ.** Αφού $x \in [-4,14]$ έχουμε ότι :

$x \geq -4 \Leftrightarrow x+4 \geq 0 \Leftrightarrow |x+4| = x+4$ και

$x \leq 14 \Leftrightarrow x-14 \leq 0 \Leftrightarrow |x-14| = -x+14$

οπότε $|x+4| + |x-14| = x+4-x+14 = 4+14 = 18$ .