ΣΑΒΒΑΤΟ 11 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αποδείξτε ότι: «Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.»

[Μονάδες 8]

Α2. Διατυπώστε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

[Μονάδες 4]

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

[Μονάδες 3]

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

ii) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ell nx)=0$.

iii) Ισχύει ότι: $\left(\ell n|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

iv) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

v) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

[Μονάδες 10]

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$, $x\neq 0$, $g(x)=\ell nx$, $x>0$ και $h=g\circ f$.

Β1. Δείξτε ότι $h(x)=\ell n\dfrac{1-x}{x}$, $x\in(0,1)$.

[Μονάδες 6]

Β2. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x\neq -1$.

[Μονάδες 7]

B3. Βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

[Μονάδες 6]

B4. Βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

[Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x-x^2, & x\le 0 \\ 2\ell n(x+1)+\beta, & x>0 \end{cases}$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Γ1. Αν η ευθεία ε: $y=2x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\mathrm{A}(0,0)$ δείξτε ότι $\alpha=2$ και $\beta=0$ και στη συνέχεια βρείτε την $f'(x)$.

[Μονάδες 7]

Για $\alpha=2$ και $\beta=0$:

Γ2. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

[Μονάδες 6]

Γ3. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει μοναδική ρίζα.

[Μονάδες 6]

Γ4. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$.

[Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f^2(x)-2xf(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)-\eta\mu x}{x^2}=1$.

Δ1. Δείξτε ότι $f(0)=1$.

[Μονάδες 6]

Δ2. Δείξτε ότι $f(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

[Μονάδες 9]

Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\ell nx$, $x>0$.

Δ3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h=f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

[Μονάδες 4]

Δ4. Δείξτε ότι η εξίσωση $h(x)=\eta\mu x-1$ είναι αδύνατη.

[Μονάδες 6]

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ