ΣΑΒΒΑΤΟ 11 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 99.
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 77.
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 70.
Α4. i) Λ ii) Λ iii) Σ iv) Σ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_h = D_{g\circ f} = \left\{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \neq 0 / \dfrac{1-x}{x} > 0\right\} = (0,1)$ και

$h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \ell n\left(\dfrac{1-x}{x}\right).$

Β2. Έστω $x_1, x_2 \neq 0$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1-x_1}{x_1} = \dfrac{1-x_2}{x_2} \Leftrightarrow x_2(1-x_1) = x_1(1-x_2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Επομένως η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} = y \Leftrightarrow 1-x = xy \Leftrightarrow x + xy = 1 \Leftrightarrow x(y+1) = 1 \overset{(y\neq -1)}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{1}{y+1}$.

Πρέπει να είναι $x \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y+1} \neq 0$, που αληθεύει για κάθε $y \neq -1$.

Άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-1\}$ και $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Β3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left((1-x)\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1-1}{1} = 0$.

Β4. $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell n\dfrac{1-x}{x}\right)$. Θέτουμε $u = \dfrac{1-x}{x}$. Όταν $x \to 0^+$, τότε $u \to \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x}{x} = +\infty$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell n\dfrac{1-x}{x}\right) = \lim\limits_{u\to +\infty} \ell n u = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ell n\dfrac{1-x}{x}\right)$. Θέτουμε $u = \dfrac{1-x}{x}$. Όταν $x \to 1^-$, τότε $u \to \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x} = 0^+$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ell n\dfrac{1-x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell n u\right) = -\infty$.

ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
Δάφνη - Άγ. Δημήτριος

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η ευθεία ε: $y=2x$ εφάπτεται της C_f στο $A(0,0)$ έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, επομένως είναι και συνεχής, και ισχύει $f'(0)=\lambda_\varepsilon=2$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \beta=0$. Επίσης

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(\alpha-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(\alpha-x)=\alpha$$. Οπότε $\alpha=2$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & x\le 0\\ 2\ell n(x+1), & x>0\end{cases}$

Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=2-2x$ και για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων με $f'(x)=\dfrac{2}{x+1}$. Επίσης $f'(0)=2$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}2-2x, & x\le 0\\ \dfrac{2}{x+1}, & x>0\end{cases}$.

Γ2. Έστω $x_1,x_2\le 0$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow 2x_1<2x_2$ (1)

Επίσης $x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^2>{x_2}^2\Leftrightarrow -{x_1}^2<-{x_2}^2$ (2)

(1)+(2): $f(x_1)<f(x_2)$.

Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+1<x_2+1\overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow}\ell n(x_1+1)<\ell n(x_2+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ell n(x_1+1)<2\ell n(x_2+1)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Έστω $x_1\le 0<x_2$, τότε $2x_1-{x_1}^2\le 0\Leftrightarrow f(x_1)\le 0$ και $x_2+1>1\Leftrightarrow 2\ell n(x_2+1)>0\Leftrightarrow f(x_2)>0$.

Οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ell n(x+1)\right)=+\infty$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Το 2023 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

$$|\eta\mu f(x)|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=0$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=0.$$

ΑΡΕΙΤΟΑΜΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=\dfrac{x\cdot f(x)-\eta\mu x}{x^2}$ (1). Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

(1) $\Leftrightarrow x\cdot f(x)-\eta\mu x = x^2 g(x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2 g(x)+\eta\mu x}{x}$. Οπότε

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 g(x)+\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot 1+1=1.$$

Η f είναι συνεχής στο 0, επομένως $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Δ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x)-2xf(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=x^2+1\neq 0$ οπότε $f(x)-x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης η $f(x)-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών, επομένως η $f(x)-x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον για $x=0$: $f(0)-0=1>0$.

Συνεπώς $f(x)-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\left(f(x)-x\right)^2=x^2+1 \overset{(f(x)-x>0)}{\Leftrightarrow} f(x)-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

Δ3. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell nx_1<\ell nx_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(g(x_1)\right)<f\left(g(x_2)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ4. Το πεδίο ορισμού της h είναι το $(0,+\infty)$, η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και γνησίως αύξουσα από το Δ3. Επίσης

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+} f(\ell nx) \underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to-\infty}}{\overset{u=\ell nx}{=}} \lim_{u\to-\infty} f(u)=\lim_{u\to-\infty}\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\lim_{u\to-\infty}\frac{\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\left(u-\sqrt{u^2+1}\right)}{u-\sqrt{u^2+1}}=$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{u^2-u^2-1}{u-\sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}} \overset{(u<0)}{=} \lim_{u\to-\infty}\frac{-1}{u+u\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{-1}{u\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\right)}=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty} f(\ell nx) \underset{\substack{x\to+\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{u=\ell nx}{=}} \lim_{u\to+\infty} f(u)=\lim_{u\to+\infty}\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(u+\sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}\right) \overset{(u>0)}{=}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(u+u\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(u\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\right)\right)=+\infty.$$

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι το $h\left((0,+\infty)\right)=(0,+\infty)$.

Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\eta\mu x-1\leq 0$.

Άρα η εξίσωση $h(x)=\eta\mu x-1$ είναι αδύνατη.