ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α3. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ

Α4. α) $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **β)** $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ **γ)** $\left(-\dfrac{5}{x}\right)' = \dfrac{5}{x^2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

Β2. $f(1) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2} - 2 + 1 = -\dfrac{11}{6}$ και $f'(1) = 2 - 3 - 2 = -3$.

Β3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2}2\left(x+\frac{1}{2}\right) = 5.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3(a+1)x^2 - 6ax + 5$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 5 \Leftrightarrow f'(1) = 5 \Leftrightarrow 3(a+1) - 6a + 5 = 5 \Leftrightarrow 3a + 3 - 6a = 0 \Leftrightarrow -3a = -3 \Leftrightarrow a = 1.$$

Γ2. Για $a = 1$ έχουμε $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$ και $f'(0) = 5$.

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(0)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2-6x+5-5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{6x}{x+1}=\frac{6}{2}=3.$$

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=12x-6$.

$xf''(x)-f'(x)<19 \Leftrightarrow x(12x-6)-\left(6x^2-6x+5\right)<19 \Leftrightarrow 12x^2-6x-6x^2+6x-5<19 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2-24<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2 \Leftrightarrow x\in(-2,2)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $A(0,2)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=2 \Leftrightarrow \sqrt{a}=2 \Leftrightarrow a=4$.

Για $a=4$ έχουμε $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

Ισχύει ότι $x^2+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $D_f=\mathbb{R}$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(x^2+4\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{f'(x)}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=0.$$

Δ3. $\lim_{x\to6}g(x)=\lim_{x\to6}\frac{x^2-7x+6}{\sqrt{x-2}-2}=\lim_{x\to6}\frac{\left(x^2-7x+6\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to6}\frac{(x-1)(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{x-6}=\lim_{x\to6}(x-1)\left(\sqrt{x-2}+2\right)=5\cdot4=20.$$

Επίσης είναι $g(6)=9$.

Επομένως $\lim_{x\to6}g(x)\neq g(6)$, άρα η g δεν είναι συνεχής στο $x_0=6$.