

ΤΑΞΗ: Γ' ΕΠΑΛ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 6)

A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} c = x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , τότε $f(2) < f(3)$.

γ) Αν $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in D_f$, τότε η f έχει μέγιστο το 1.

(Μονάδες 6)

A4. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(\varepsilon\phi x)' = \dots\dots\dots$, αν $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

β) $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$, αν f, g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

γ) $\left(-\frac{5}{x}\right)' = \dots\dots\dots$, αν $x \neq 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x + 1$.

B1. Να βρείτε την $f'(x)$.

(Μονάδες 9)

B2. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

(Μονάδες 6)

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{x-2}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (a+1)x^3 - 3ax^2 + 5x - 2$, για την οποία

ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 5$.

Γ1. Να δείξετε ότι $a = 1$.

(Μονάδες 9)

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(0)}{x^2 - 1}$.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $xf''(x) - f'(x) < 19$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, όπου $a > 0$ σταθερά. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2.

Δ1. Να δείξετε ότι $a = 4$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 8)

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f'(x)} - \frac{2}{x} \right)$.

(Μονάδες 8)

Δ3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 6}{\sqrt{x-2} - 2}, & x \in [2, 6) \cup (6, +\infty) \\ 9, & x = 6 \end{cases}$, είναι συνεχής στο $x_0 = 6$.

(Μονάδες 9)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!