ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** Παναγιώτης Πήλιουρας

**Θέμα Α:**

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 83

Α2. Λ – Σ – Λ – Λ – Λ

Α3. 1-γ, 2-δ, 3-β.

**Θέμα Β:**

**Β1.** Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x'x και κορυφή O(0,0) έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$. Άρα $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$. Συνεπώς η εξίσωση της παραβολής είναι: $y^2 = 8x$.

**Β2.** Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{p}{2} = -2$.

**Β3.** Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της Α έχει εξίσωση:

$y_1 \cdot y = p(x + x_1)$, Οι συντεταγμένες του Α ικανοποιούν την εξίσωση της παραβολής με τεταγμένη θετική. Συνεπώς $y_1{}^2 = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow y_1 = \sqrt{24} \Leftrightarrow y_1 = 2\sqrt{6}$.

Άρα η εξίσωση της (ε) είναι:

$$2\sqrt{6} \cdot y = 4(x+3) \Leftrightarrow y = \frac{4}{2\sqrt{6}}(x+3) \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{6}}{6}(x+3) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{3}(x+3).$$

**Θέμα Γ:**

Γ1. Το κέντρο του κύκλου έχει συντεταγμένες Κ(1,0). Συνεπώς και η εστία της παραβολής θα έχει συντεταγμένες Ε(1,0).

Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x'x και κορυφή O(0,0) έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$. Άρα $\frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 2$. Συνεπώς η εξίσωση της παραβολής είναι: $y^2 = 4x$.

Γ2. Για να βρούμε τις συντεταγμένες των Α και Β θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x=1 \\ y^2=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm 2 \end{cases} \quad \text{Οπότε} \quad A(1,2), \quad B(1,-2)$$

Υπολογίζουμε τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{OA}=\left(x_A-x_O, y_A-y_O\right)=\left(1,2\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(x_B-x_O, y_B-y_O\right)=\left(1,-2\right), \quad \text{οπότε}: E=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 4=2\text{τ.μ.}$$

Γ3. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων, στα σημεία A και B, είναι αντίστοιχα με αντικατάσταση των συντεταγμένων των A και B στον τύπο: $y_1 \cdot y=p\left(x+x_1\right)$,

$$\begin{cases} 2y=2\cdot\left(x+1\right) \\ -2y=2\left(x+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=2 \\ -2x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\ldots \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{Οπότε} \quad M\left(-1,0\right)$$

**Θέμα Δ:**

**Δ1.** (α). Η εξίσωση (1) είναι της μορφής

$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma=81+9-40=50>0$. Συνεπώς είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα $\varrho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

(β). Από τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία, υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) δηλαδή:

$$d\left(K,\varepsilon\right)=\frac{\left|4\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{3}{2}-10\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\left|\frac{25}{2}\right|}{5}=\frac{5}{2}<\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}=\varrho$$

Οπότε, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο ( C ) σε δύο σημεία A και B.

**Δ2.** (α) Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

$$\overrightarrow{OA}=\left(x_A-x_O, y_A-y_O\right)=\left(1,2\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(x_B-x_O, y_B-y_O\right)=\left(4,-2\right), \quad \text{οπότε}: \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot 4+2\cdot\left(-2\right)=0$$

(β) Αφού είναι $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, η γωνία $A\hat{O}B$ θα είναι ορθή. Επομένως , ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB. Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O.