ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: Διονύσης Κλαυδιανός

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

β) Για οποιαδήποτε συνάρτηση ισχύει ότι αν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

γ) Ισχύει ότι: $\left(\ell n|x|\right)'=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(\alpha)<f(\beta)$, τότε $\left[f(\alpha),f(\beta)\right]\subseteq f\left([\alpha,\beta]\right)$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\beta^\alpha\left(-f(x)\right)dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x>1$ και $g(x)=\ell nx$, $x>0$.

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε τη συνάρτηση $\varphi=g\circ f$.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=\ell n\dfrac{x}{x-1}$, $x>1$ να βρείτε:

i) Την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (δ): $y=2x$.

Μονάδες 6

ii) Το $\lim_{x\to+\infty}\left(\varphi(x)\cdot \eta\mu g(x)\right)$

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+1, & x<1 \\ \dfrac{\ell nx}{x}+1, & x\geq 1 \end{cases}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

Μονάδες 6

Γ3. Σημείο $M(x,y)$ κινείται πάνω στην καμπύλη $y=f(x)$, $x<1$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $1cm/\sec$. Αν Κ είναι το σημείο $(-2,0)$ και Ο η αρχή των αξόνων, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ τη χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $(0,1)$.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $g(x)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(x^2+1)f'(x)=2-2xf(x)$.
- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, με γνησίως μονότονη πρώτη παράγωγο και επιπλέον ισχύει $g(0)=g(1)>0$ και $g(2)=0$.

Δ1. Δείξτε ότι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

Δ2. Δείξτε ότι η g είναι κοίλη.

Μονάδες 6

Δ3. Δείξτε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε μοναδικό σημείο.

Μονάδες 6

Δ4. Αν x_0 είναι η θέση ολικού μέγιστου της g, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=x_0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες $\rho_1<\rho_2$ και στη συνέχεια δείξτε ότι ισχύει $g'\left(f(x)\right)-g'(x_0)<0$ για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$.

Μονάδες 6

Σας ευχόμαστε επιτυχία!!!