ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: Διονύσης Κλαυδιανός

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 144.
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 216.
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 162.
Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως ρητή, με $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$D_{f^{-1}}=f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\right)=(1,+\infty)$.

$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}=y\Leftrightarrow \dots\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{y-1}$. Επομένως $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x>1$.

Συνεπώς $D_{f^{-1}}=D_f=(1,+\infty)$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Άρα $f^{-1}=f$.

Β2. $D_\varphi=D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\right\}=\left\{x>1/\dfrac{x}{x-1}>0\right\}=\left\{x>1/\,x<0 \text{ ή } x>1\right\}=(1,+\infty)$

$\varphi(x)=(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\ell n\dfrac{x}{x-1}$.

Β3. i) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$\varphi'(x)=\left(\ell n\dfrac{x}{x-1}\right)'=\dots=-\dfrac{1}{x(x-1)}$.

Έστω $(x_0,\varphi(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης. Τότε

$\varphi'(x_0)\cdot\lambda_\delta=-1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_0(x_0-1)}\cdot2=-1\Leftrightarrow\dots\overset{(x_0>1)}{\Leftrightarrow}x_0=2$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$y-\varphi(2)=\varphi'(2)(x-2)\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1+\ell n2$.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{\substack{x\to+\infty\\ u\to 1}}{\overset{u=\frac{x}{x-1}}{=}} \lim\limits_{u\to 1}(\ell nu) = 0$. Επίσης

$|\eta\mu g(x)| \le 1 \Leftrightarrow |\varphi(x)\cdot\eta\mu g(x)| \le |\varphi(x)| \Leftrightarrow -|\varphi(x)| \le \varphi(x)\cdot\eta\mu g(x) \le |\varphi(x)|$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}|\varphi(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-|\varphi(x)|\right) = 0$.

Από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\varphi(x)\cdot\eta\mu g(x)\right) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(-x^2+x+1) = 1$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{\ell nx}{x}+1\right) = 1$ και $f(1)=1$. Άρα η f είναι συνεχής στο 1.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{-x(x-1)}{x-1} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{\ell nx}{x}}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\ell nx}{x^2-x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = 1.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \ne \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Γ2. • Από το Γ1 έχουμε ότι το 1 είναι κρίσιμο σημείο της f.

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -2x+1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Επομένως το $\dfrac{1}{2}$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

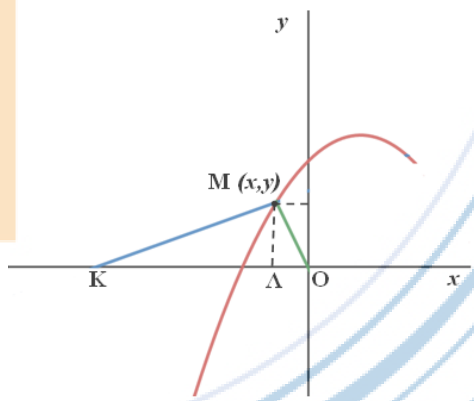
• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$f'(x) = \dfrac{1-\ell nx}{x^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ell nx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ell nx = 0 \Leftrightarrow x=e$. Επομένως και το e είναι κρίσιμο σημείο της f.

Γ3. Είναι $y(t) = -x^2(t)+x(t)+1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ βρίσκεται στη θέση $(0,1)$ έχουμε $x(t_0)=0$ και $x'(t_0)=1$.



Το εμβαδόν του ΜΟΚ είναι $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{KO})(\mathrm{M\Lambda})$,

οπότε $\mathrm{E}(t) = \dfrac{1}{2}\cdot|-2|\cdot y(t) = -x^2(t)+x(t)+1$.

Επομένως $\mathrm{E}'(t) = -2x(t)\cdot x'(t) + x'(t)$ και για $t=t_0$

έχουμε $\mathrm{E}'(t_0) = -2x(t_0)\cdot x'(t_0)+x'(t_0) =$

$= -2\cdot0\cdot1+1 = 1\ cm^2/\sec$.

Γ4. Για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $\ell nx \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ell nx}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ell nx}{x}+1 \ge 1 \Leftrightarrow f(x)\ge 1$, ενώ

$1 \le x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le -x \le -1 \Leftrightarrow e^{-2} \le e^{-x} \le e^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^2} \le g(x) \le \frac{1}{e}$.

Οπότε $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [1,2]$. Επομένως

$$E = \int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 \left(\frac{\ell nx}{x} + 1 - e^{-x}\right)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\ell n^2 x + x + e^{-x}\right)' dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ell n^2 x + x + e^{-x}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}\ell n^2 2 + 1 + \frac{1-e}{e^2}\right) \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(x^2+1) f'(x) = 2 - 2xf(x) \Leftrightarrow (x^2+1) f'(x) + 2xf(x) = 2 \Leftrightarrow \left((x^2+1) f(x)\right)' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1) f(x) = 2x + c \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε $f(0) = 0$.

Για $x = 0$ η (1) δίνει $c = 0$.

Επομένως $(x^2+1) f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = ... = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f((-\infty,-1)) \overset{f:\text{συν.}}{\underset{f:\downarrow}{=}} \left(\lim_{x\to -1} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-1,0)$$

$$f([-1,1]) \overset{f:\text{συν.}}{\underset{f:\uparrow}{=}} [f(-1), f(1)] = [-1,1]$$

$$f((1,+\infty)) \overset{f:\text{συν.}}{\underset{f:\downarrow}{=}} \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)\right) = (0,1)$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Δ2. Για τη g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$ επομένως υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

Για τη g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1,2]$ επομένως υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_1) = \frac{g(2) - g(1)}{2-1} = -g(1) < 0$.

Η g' είναι γνησίως μονότονη.

Έστω ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$x_0 < x_1 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x_0) < g'(x_1) \Leftrightarrow 0 < -g(1) \Leftrightarrow g(1) < 0$ ΑΤΟΠΟ.

Επομένως η g' είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η g είναι κοίλη.

Δ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και από το Δ2 έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$ και αφού η g' είναι γνησίως φθίνουσα, το x_0 είναι το μοναδικό σημείο μηδενισμού της g' και συνεπώς η μοναδική πιθανή θέση ακρότατου.

Για $x < x_0 \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_0]$.

Για $x > x_0 \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} g'(x) < g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x) < 0$. Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0.

Δ4. Από το Δ1 έχουμε $f\left((0,1)\right) \underset{f:\uparrow}{\overset{f:\sigma\upsilon\nu.}{=}} \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) = (0,1)$ και

$f\left((1,+\infty)\right) \underset{f:\downarrow}{\overset{f:\sigma\upsilon\nu.}{=}} \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) = (0,1)$.

Επίσης $f(1) = 1 \neq x_0$.

Οπότε $x_0 \in f\left((0,1)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = x_0$.

Επίσης $x_0 \in f\left((1,+\infty)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $\rho_2 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = x_0$.

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$g'\left(f(x)\right) - g'(x_0) < 0 \Leftrightarrow g'\left(f(x)\right) < g'(x_0) \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > x_0 \Leftrightarrow f(x) - x_0 > 0.$$

Θέτουμε $h(x) = f(x) - x_0$, $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Η h είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο (ρ_1, ρ_2). Επομένως διατηρεί πρόσημο στο (ρ_1, ρ_2).

Επίσης $h(1) = f(1) - x_0 = 1 - x_0 > 0$.

Άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x_0 > 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.