ΣΑΒΒΑΤΟ 18 ΜΑΡΤΙΟΥ 2023

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. ***Μονάδες 7***

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; ***Μονάδες 4***

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.»

α. Να χαρακτηρίσετε ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ) τον παραπάνω ισχυρισμό. ***Μονάδα 1***

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. ***Μονάδες 3***

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση της λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) και για ένα εσωτερικό σημείο x_0 του (α,β) ισχύει $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx > 0$.

δ) Η συνάρτηση $f(x)=x^x$, $x>0$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $(x^x)' = x\cdot x^{x-1}$.

ε) Αν οι f', g' είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει:
$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta + \int_\beta^\alpha f'(x)g(x)dx$. ***Μονάδες 10***

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x-e, & x<1 \\ \ell n x+\alpha, & x\geq 1 \end{cases}$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$. *Μονάδες 4*

Για $\alpha=0$:

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της f. *Μονάδες 7*

Β3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. *Μονάδες 7*

Β4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f. *Μονάδες 7*

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2e^x+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. *Μονάδες 7*

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. *Μονάδες 7*

Γ3. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f'(\rho_1)<0<f'(\rho_2)$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι για τις ρίζες ρ_1,ρ_2 του ερωτήματος Γ3 ισχύει:

$f(\rho_2-\rho_1)>(-\rho_1)\cdot f'(\rho_2)$. *Μονάδες 6*

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο και F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- $F(\pi)=1$
- $\int_0^{\pi}\left(F(x)+f'(x)\right)\eta\mu x\,dx=2$

Δ1. Να δείξετε ότι $F(0)=1$. *Μονάδες 6*

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρούμε ότι $F(x)=x\eta\mu x+1$, $x\in\mathbb{R}$, μία παράγουσα της f.

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,\pi)$. *Μονάδες 5*

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g με $g(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$. *Μονάδες 8*

Σας ευχόμαστε επιτυχία!!!