ΣΑΒΒΑΤΟ 18 ΜΑΡΤΙΟΥ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 155

Α3. α. Ψ
Β. Αντιπαράδειγμα: η συνάρτηση $f(x)=x^3$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(0)=3\cdot 0^2=0$.

Α4. Λ – Σ – Λ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f συνεχής στο $x_0=1$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=0$.

Β2. Η συνάρτηση για $a=0$ γίνεται: $f(x)=\begin{cases} e^x-e, & x<1 \\ \ell n\, x, & x\geq 1\end{cases}$

Για $x<1,\ f'(x)=e^x>0,$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Για $x>1,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}>0,$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Για το σύνολο τιμών έχουμε:
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε: $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-e,+\infty)$

Διότι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-e\right)=0-e=-e,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\, x=+\infty$

Β3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται με επιμέρους σύνολα τιμών σε κάθε διάστημα τα εξής:

Για $x<1,\ f$ *συνεχής και* $\nearrow$, *οπότε* : $f(A_1)=(-e,0)$ και τύπο αντίστροφης

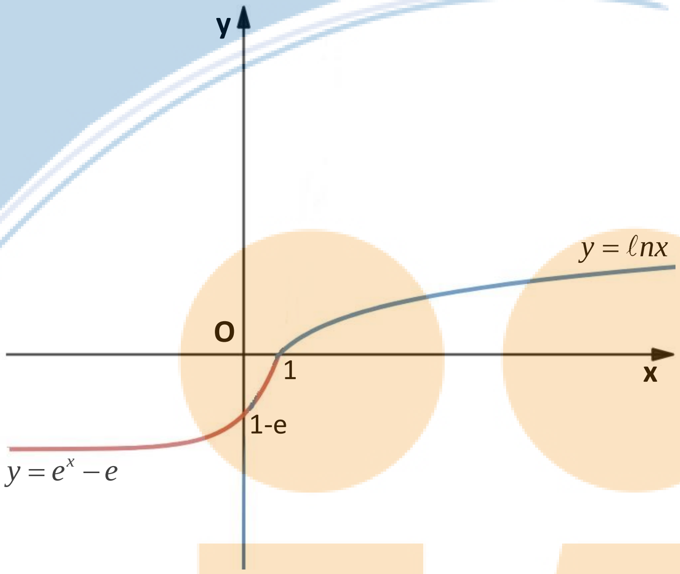
$y=e^x-e\Leftrightarrow y+e=e^x\Leftrightarrow x=\ln(y+e)$ δηλαδή: $f^{-1}(x)=\ln(x+e),\quad με\quad x\in(-e,0)$

Για $x \geq 1$, f *συνεχής και* $\nearrow$, *οπότε* : $f(A_2) = [0,+\infty)$ και τύπο αντίστροφης

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ δηλαδή: $f^{-1}(x) = e^x$, $\mu\varepsilon \quad x \in [0,+\infty)$

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x+e), & \mu\varepsilon \quad x \in (-e,0) \\ e^x, & \mu\varepsilon \quad x \in [0,+\infty) \end{cases}$

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + 2x$. Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 2e^0 - 2e^0 + 2 \cdot 0 = 2 - 2 = 0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x + 2 = e^{2x} - 2e^x + 1 + 3e^{2x} + 1 = (e^x - 1)^2 + 3e^{2x} + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \overset{f':\sigma\upsilon\nu.}{\Rightarrow}$

η f' είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Για $x > 0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \overset{f:\sigma\upsilon\nu.}{\Rightarrow}$ f γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- Για $x < 0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \overset{f:\sigma\upsilon\nu.}{\Rightarrow}$ f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Γ2. Για το σύνολο τιμών έχουμε:

- $f((-\infty,0]) \underset{f:\sigma\upsilon\nu.}{\overset{f:\downarrow}{=}} \left[f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x) \right) = [-1,+\infty)$ γιατί: $f(0) = e^0 - 2e^0 + 0^2 = 1 - 2 = -1$ και

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{2x} - 2e^x + x^2\right) = 0 - 0 + (+\infty) = +\infty$.

- $f([0,+\infty)) \underset{f:\sigma\upsilon\nu.}{\overset{f:\uparrow}{=}} \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right) = [-1,+\infty)$ γιατί:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - 2e^x + x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - 2e^x + 1 + x^2 - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \left[(e^x - 1)^2 + x^2 - 1 \right] =$

$+\infty+(+\infty)=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=[-1,+\infty)\cup[-1,+\infty)=[-1,+\infty)$.

- $0\in f((-\infty,0])=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_1<0$ (αφού $f\downarrow$ και $f(0)=-1$) τέτοιο ώστε $f(\rho_1)=0$.
- $0\in f([0,+\infty))=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_2>0$ (αφού $f\uparrow$ και $f(0)=-1$) τέτοιο ώστε $f(\rho_2)=0$.

Άρα $\rho_1<0<\rho_2$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$: κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, από το Γ2 έχουμε $\rho_1<0<\rho_2\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\rho_1)<f'(0)<f'(\rho_2)$ και αφού $f'(0)=0\Rightarrow$ $f'(\rho_1)<0<f'(\rho_2)$.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\rho_2,0)$ έχει εξίσωση

$$y-f(\rho_2)=f'(\rho_2)(x-\rho_2)\overset{f(\rho_2)=0}{\Leftrightarrow}y=f'(\rho_2)(x-\rho_2).$$

Αφού η f είναι κυρτή, η γραφική της παράσταση βρίσκεται «πάνω» από κάθε εφαπτομένη της. Επομένως $f(x)\geq f'(\rho_2)(x-\rho_2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\rho_2$.

Για $x=\rho_2-\rho_1$ έχουμε: $f(\rho_2-\rho_1)>f'(\rho_2)(\rho_2-\rho_1-\rho_2)\Leftrightarrow f(\rho_2-\rho_1)>(-\rho_1)f'(\rho_2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$\int_0^\pi (F(x)+f'(x))\eta\mu x dx=2\Leftrightarrow\int_0^\pi F(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f'(x)\eta\mu x dx=2\Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi F(x)(-\sigma\upsilon\nu x)'dx+\left[f(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)(\eta\mu x)'dx=2\Leftrightarrow$$

$$-\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot F(x)\right]_0^\pi+\int_0^\pi F'(x)\sigma\upsilon\nu x dx-\int_0^\pi f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=2\Leftrightarrow$$

$$1+F(0)+\int_0^\pi \cancel{f(x)\sigma\upsilon\nu x dx}-\int_0^\pi \cancel{f(x)\sigma\upsilon\nu x dx}=2\Leftrightarrow 1+F(0)=2\Leftrightarrow F(0)=1.$$

Δ2. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την F στο $[0,\pi]$:

- Η F συνεχής στο $[0,\pi]$
- Η F παρ/μη στο $(0,\pi)$
- $F(0)=F(\pi)=1$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=0$.

Δ3. Αφού $F(x)=x\eta\mu x+1 \Rightarrow F'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, δηλ. $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x,\ \ x\in[0,\pi]$.

Από το Δ2 γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$.

Παρατηρούμε ότι για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x)>0$. Επομένως η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ βρίσκεται αναγκαστικά στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Επίσης $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x=2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, γιατί $\sigma\upsilon\nu x<0$, $x>0$ και $\eta\mu x>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}|\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x|dx=\int_0^{\pi}|x\sigma\upsilon\nu x|dx=\int_0^{\pi}x|\sigma\upsilon\nu x|dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}x\sigma\upsilon\nu x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\pi/2}x(\eta\mu x)'\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}x\cdot(\eta\mu x)'dx=$$

$$=[x\eta\mu x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(x)'\eta\mu x dx-[x\eta\mu x]_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi/2}^{\pi}(x)'\eta\mu x dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\eta\mu x dx+\frac{\pi}{2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\eta\mu x dx=\pi+\int_0^{\pi/2}(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx=$$

$$=\pi+[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2}-[\sigma\upsilon\nu x]_{\pi/2}^{\pi}=\pi-1-(-1)=\pi-1+1=\pi \ \text{τ.μ.}$$