ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 18 ΜΑΡΤΙΟΥ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΑΔΑΜΑΝΤΙΑΔΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Σχολ. βιβλίο σελ.135

Β. α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

α) Έχουμε: $P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 3 = 1 \neq 0$.

Επομένως το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Το σχήμα Horner με διαιρετέο $P(x)$ και διαιρέτη $x + 2$ δίνει :

1	2	1	3	ρ = -2
	-2	0	-2	
1	0	1	1	

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$.

γ) Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x)$: $(x + 2)$ γράφεται $P(x) = (x + 2)(x^2 + 1) + 1$.

ΘΕΜΑ Γ

α) $f(x) = \eta\mu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 5\eta\mu(2\pi + x) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\sigma\upsilon\nu(\pi + x) \Leftrightarrow$

$$f(x) = \eta\mu x \cdot \eta\mu x - 5\eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x\right)(-\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu x - \eta\mu\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -5\eta\mu x + (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -5\eta\mu x + 1$$

β) Έχουμε : $g(x) = f(2x) \Leftrightarrow g(x) = -5\eta\mu(2x) + 1$

Η g είναι συνάρτηση της μορφής $\rho\cdot\eta\mu(\omega x) + c$, με $\rho = -5,\ \omega = 2,\ c = 1$.

Η περίοδος της g είναι : $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow T = \pi$.

Η g παρουσιάζει μέγιστο ίσο με : $g_{max} = |\rho| + c = |-5| + 1 = 6$

και ελάχιστο ίσο με : $g_{min} = -|\rho| + c = -|-5| + 1 = -4$

γ) Έχουμε :

$$f(x) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x - 3 \Leftrightarrow$$

$$-5\eta\mu x + 1 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x - 3 \Leftrightarrow$$

$$-5\eta\mu x + 1 - 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-5\eta\mu x + 1 - 2\cdot(1 - \eta\mu^2 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-5\eta\mu x + 1 - 2 + 2\eta\mu^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 2 = 0 \quad \mathbf{(1)}$$

Θέτουμε $\eta\mu x = y$ και η **(1)** γράφεται ισοδύναμα : $2y^2 - 5y + 2 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 16 = 9$

$y_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5\pm3}{4}$, άρα $y = 2$ ή $y = \frac{1}{2}$

Όμως $y = \eta\mu x$ άρα:

$\eta\mu x = 2\ (A\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\ , -1 \le \eta\mu x \le 1\quad \forall x\epsilon\mathbb{R})$ ή $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

α) i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)$ ισχύει ότι:

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3 + \alpha\cdot 1^2 + \beta\cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$.

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)$ είναι το $P(2)$.

Άρα, $P(2) = -1 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3 + \alpha\cdot 2^2 + \beta\cdot 2 - 5 = -1 \Leftrightarrow$

$$16 + 4\alpha + 2\beta - 5 = -1 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha + 2\beta = -12 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + \beta = -6.$$

ii. Για να βρούμε τις τιμές των α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha + \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = -\alpha + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 12 \end{cases}$$

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x)$: $(x - 1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	ρ=1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5)$. Το τριώνυμο $2x^2 - 7x + 5$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$ και ρίζες: $x_1 = \frac{7+\sqrt{9}}{4} = \frac{5}{2}$ και $x_2 = = \frac{7-\sqrt{9}}{4} = 1$.

Άρα, $P(x) = (x - 1) \cdot 2(x - 1)\,(x - \frac{5}{2}) = 2(x - 1)^2\,(x - \frac{5}{2})$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x\,'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2\,(x - \tfrac{5}{2}) < 0$$

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x - \frac{5}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right)$.

γ) Από το ερώτημα (β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία (1,0) και ($\frac{5}{2}$, 0). Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.