ΣΑΒΒΑΤΟ 11 ΜΑΡΤΙΟΥ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΔΗΜΟΥΛΕΑΣ ΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i) και ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 90.

Β. α) **(Λ)** β) **(Σ)** γ) **(Σ)** δ) **(Σ)** ε) **(Σ)**

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

$$|2x-3|<8 \Rightarrow -8<2x-3<8 \Rightarrow -8+3<2x<8+3$$

$$\Rightarrow -5<2x<11 \Rightarrow -\frac{5}{2}<x<\frac{11}{2}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε την λύση και σε μορφή διαστήματος:

$$x \in (-\frac{5}{2}, \frac{11}{2})$$

Για την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$ υπολογίζουμε την διακρίνουσα:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και άρα

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Οπότε

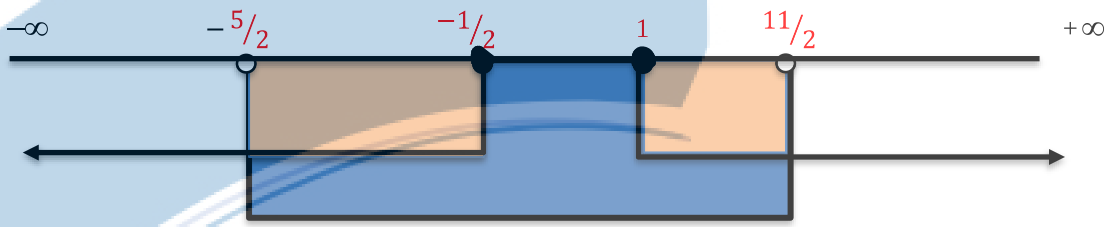
$$x_1 = \frac{4}{4} = 1, \qquad x_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$^{-1}/_2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		+	0	-	0	+	

Και άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, ^{-1}/_2] \cup [1, +\infty)$.

Β. Για να βρούμε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων, αρκεί να παραστήσουμε τις λύσεις τους σε κοινό άξονα και να δούμε που τέμνονται (αν υπάρχουν κοινές λύσεις).



Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι:

$$x \in (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [1, \frac{11}{2})$$

ΘΕΜΑ 3º

Α1. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα και με την χρήση του τύπου για τις λύσεις παίρνουμε:

$$\Delta = 4 - 4(-3) = 16 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{4}$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Α2.

$$\lambda^2(x+1) = 1 + (2\lambda + 3)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x + \lambda^2 = 1 + 2\lambda x + 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x = 1 - \lambda^2$$

Β. Για να έχει η εξίσωση Αx=Β μοναδική λύση, γνωρίζουμε ότι πρέπει το Α ≠ 0:

Οπότε έχουμε ότι πρέπει $\lambda^2 - 2\lambda - 3 \neq 0$

Από (Α) ερώτημα έχουμε δει ότι το συγκεκριμένο τριώνυμο μηδενίζεται για

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{ή} \quad \lambda_2 = -1$$

Και άρα η εξίσωση (1) θα έχει μοναδική λύση για $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -1$.

Επιπλέον, η λύση θα δίνεται από την σχέση

$$x = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2 - 2\lambda - 3} = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{(\lambda-3)(\lambda+1)} = \frac{1-\lambda}{\lambda-3}$$

Γ. Για να είναι η εξίσωση Ax=B αδύνατη, γνωρίζουμε ότι πρέπει το A= 0 και B $\neq 0$:

Δηλαδή

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ \text{και} \\ 1-\lambda^2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 3 \quad \text{ή} \quad \lambda = -1 \\ \text{και} \\ (1-\lambda)(1+\lambda) \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda \neq 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lambda \neq -1 \end{array} \right\}$$

Άρα για λ= 3 είναι αδύνατη.

Δ. Από το ερώτημα (Β) γνωρίζουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση για $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -1$, η οποία δίνεται από τύπο

$$x = \frac{1-\lambda}{\lambda-3}$$

Οπότε για να έχει λύση το $x = 1$, υπολογίζουμε από τον παραπάνω τύπο,

$$1 = \frac{1-\lambda}{\lambda-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 3 = 1 - \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda = 1 + 3 \Rightarrow$$

$$2\lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\lambda = 2$$

Και αφού το λ που προκύπτει είναι διάφορο 3 και του 1, έχουμε για αυτήν την τιμή του, λ= 2, ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση το x = 1.

ΘΕΜΑ 4ο *(Τράπεζα Θεμάτων)*

A.

$$\Delta=[-(\alpha+1)]^2-4(4+\alpha)=(\alpha+1)^2-16-4\alpha=$$
$$=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha=\alpha^2-2\alpha+1-16=(\alpha-1)^2-16$$

B. Το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες όταν Δ>0:

- ***1ος τρόπος***

  Οπότε από

  $\Delta=(\alpha-1)^2-16\Rightarrow\Delta=(\alpha-1-4)(\alpha-1+4)=(\alpha-5)(\alpha+3)$

  Και άρα οι ρίζες του είναι το 5 και το -3.

  Φτιάχνουμε το πινακάκι για την διακρίνουσα Δ, από το οποίο θα μπορέσουμε να καθορίσουμε που πρέπει να ανήκει το α, ώστε να είναι Δ>0.

α	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Δ		+	0	-	0	+	

Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

Και άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

- ***2ος τρόπος***

  Γράφουμε την διακρίνουσα σε μορφή τριωνύμου:

  $\Delta=(\alpha-1)^2-16\Rightarrow$

  $\Delta=\alpha^2-2\alpha+1-16=\alpha^2-2\alpha-15$

  Και υπολογίζουμε την διακρίνουσα της, ώστε να μπορέσουμε να φτιάξουμε το πινακάκι του πρόσημού της, για τις διάφορες τιμές του α.

$$\Delta=4-4(-15)=64>0$$
$$\alpha_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2}$$
$$\alpha_1=5\ ,\alpha_2=-3$$

  Και προκύπτει όπως και στον 1ο τρόπο το ίδιο πινακάκι:

α	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Δ		+	0	-	0	+	

Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

Και άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

Γ. I)

$$S = \frac{-\beta}{\alpha} = \alpha + 1, \qquad P = \frac{\gamma}{\alpha} = 4 + \alpha$$

II)

$$d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = |x_1 - 1||x_2 - 1| = |(x_1 - 1)(x_2 - 1)| =$$

$$= |x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1| = |P - (x_1 + x_2) + 1| = |P - S + 1| =$$

$$= |4 + \alpha - \alpha - 1 + 1| = 4$$