ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

« Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.»

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α3. Έστω ο ισχυρισμός: «Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in R$, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες».
Να απαντήσετε αν ο ισχυρισμός είναι Σωστός ή Λάθος (Μονάδα 1). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 3).

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο απαντήσεων, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$.

β. Αν $f(x)=\ln|x|,\ x\in R^*$, ισχύει ότι: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in R^*$.

γ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

ε. Για κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)>0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x<0\\ x^2+\alpha, & x\ge 0\end{cases}$.

Β1. Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 5

Για $\alpha=-1$:

Β2. Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=-e^{-x}$, με $x<0$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y=e\cdot x$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του προηγούμενου ερωτήματος έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-1$, με $x\geq 0$ στο διάστημα (2,4).

Μονάδες 7

Β4. Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο Α(0,-1) και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^2-1$, με $x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για $t\geq 0$;

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)-f(x)=-f'(x)\cdot e^x$, για κάθε $x\in R$,
- $f(0)=\frac{1}{2}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την μονοτονία της f και της f' καθώς και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

Γ3. Να εξετάσετε αν έχει λύση στο R η εξίσωση $f(x)=\frac{2022}{2023}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι $2\cdot f(\beta+1)>f(\beta)+f(\beta+2)$ για κάθε $\beta>0$.

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(0)\cdot x^2+f(2)\cdot x+6}{x-2}=-1$.

Δ1. Να δειχθεί ότι: $f(0)=1$ και $f(2)=-5$ και να βρεθεί η μονοτονία της f.

Μονάδες 7

Δ2. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=-2\xi-1$.

Μονάδες 4

Δ3. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$ και στη συνέχεια ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{5}{f'(x_2)}=-2$.

Μονάδες 8

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=x^2+1$, για $x\geq 0$

Μονάδες 6

Ευχόμαστε Καλή Χρονιά και Επιτυχία!!!