ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Επιμέλεια διαγωνίσματος:** ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΗΛΙΟΥΡΑΣ

## Θέμα Α:

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 133

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα 128

Α3. Ο ισχυρισμός είναι λάθος διότι από το πόρισμα της σταθερής συνάρτησης έχουμε: $f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c, c\in R$.

Έτσι για παράδειγμα έχουμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x^2+10$, $x\in R$ οι οποίες έχουν ίσες πρώτες παραγώγους $f'(x)=g'(x)=2x$ για κάθε $x\in R$, αλλά δεν είναι ίσες.

Α4. α. Σ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

## Θέμα Β:

Β1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως σύνθεση συνεχών και στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της f στο σημείο $x_0=0$ και το $f(0)$:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-e^{-x}\right)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+\alpha)=\alpha$ και $f(0)=\alpha$.

Για να είναι η f συνεχής πρέπει: $\alpha=-1$.

Β2. Θεωρούμε γενική μορφή εξίσωσης εφαπτομένης:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y+e^{-x_0}=e^{-x_0}(x-x_0)$.

Το Ο (0,0) ικανοποιεί την εξίσωση οπότε έχουμε: $e^{-x_0}=e^{-x_0}(-x_0)\Leftrightarrow x_0=-1$. Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y=e\cdot x$.

Β3. Θα δείξουμε ότι έχει λύση η εξίσωση $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-1=e\cdot x$ έχει λύση στο $(2,4)$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=x^2-1-e\cdot x,\ x\in[2,4]$

Η h είναι συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξεις συνεχών.

$h(2)=3-2e<0$ και $h(4)=15-4e>0$, οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(2,4):h(x_1)=0$.

B4. Από τον τύπο της συνάρτησης της καμπύλης έχουμε: $y(t)=(x(t))^2-1$

Παραγωγίζοντας τη σχέση έχουμε:

$y'(t)=2x(t)x'(t)\Rightarrow 2x'(t)=2x(t)x'(t)\Rightarrow x'(t_0)=x(t_0)x'(t_0)\Rightarrow x(t_0)=1$ οπότε: $y(t_0)=0$,

Άρα το σημείο είναι: A(1,0).

**<u>Θέμα Γ:</u>**

Γ1. Για κάθε $x\in R$ έχουμε: $f'(x)-f(x)=-f'(x)\cdot e^x$.

Πολλαπλασιάζουμε με $e^x$ και τα δύο μέλη και μετά διαιρούμε με $e^{2x}$:

$$f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x=-f'(x)\cdot e^{2x}\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{e^{2x}}=-f'(x)\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\left(-f(x)\right)'.$$

Άρα από το πόρισμα της σταθερής συνάρτησης έχουμε: $\frac{f(x)}{e^x}=-f(x)+c$.

Όμως $f(0)=\frac{1}{2}$. Άρα για $x=0$ έχουμε: $\frac{f(0)}{e^0}=-f(0)+c\Leftrightarrow \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=1$.

Συνεπώς: $\frac{f(x)}{e^x}=-f(x)+1\Leftrightarrow f(x)=-f(x)\cdot e^x+e^x\Leftrightarrow f(x)(e^x+1)=e^x\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

Γ2. • Για τη μονοτονία της f έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in R.$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

- Για τη μονοτονία της $f'$ έχουμε ότι η $f'$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{(e^x+1)(e^{2x}+e^x-2e^{2x})}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

Άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R οπότε το σύνολο τιμών της f είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(0,1\right)$ διότι:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$ και

1ος Τρόπος: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ ή

2ος Τρόπος: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$

Γ3. Η f έχει σύνολο τιμών το $\left(0,1\right)$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Το $\frac{2022}{2023} \in (0,1)$. Άρα υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2022}{2023}$.

Γ4. Για $\beta > 0$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\beta, \beta+1]$, $[\beta+1, \beta+2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\beta, \beta+1)$ και $\xi_2 \in (\beta+1, \beta+2)$ τέτοια ώστε

$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta+1) - f(\beta)}{(\beta+1) - (\beta)} = f(\beta+1) - f(\beta)$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta+2) - f(\beta+1)}{(\beta+2) - (\beta+1)} = f(\beta+2) - f(\beta+1)$.

Επίσης η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε

$\xi_1 < \xi_2 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(\beta+1) - f(\beta) > f(\beta+2) - f(\beta+1) \Leftrightarrow 2f(\beta+1) > f(\beta) + f(\beta+2)$.

**<u>Θέμα Δ:</u>**

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(0) \cdot x^2 + f(2) \cdot x + 6}{x-2}$, $x \neq 2$ για την οποία είναι $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -1$.

Οπότε: $g(x) \cdot (x-2) = f(0) \cdot x^2 + f(2) \cdot x + 6$, άρα

$\lim\limits_{x \to 2} \left[ g(x) \cdot (x-2) \right] = \lim\limits_{x \to 2} \left[ f(0) \cdot x^2 + f(2) \cdot x + 6 \right] \Leftrightarrow 0 = 4f(0) + 2f(2) + 6 \Leftrightarrow f(2) = -2f(0) - 3 \quad (1)$

Συνεπώς:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(0) \cdot x^2 + f(2) \cdot x + 6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(0) \cdot x^2 + (-2f(0) - 3) \cdot x + 6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(0) \cdot x(x-2) - 3(x-2)}{x-2} =$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(f(0) \cdot x - 3)}{x-2} = 2f(0) - 3$

Όμως: $2f(0) - 3 = -1 \Leftrightarrow 2f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$. Άρα, από (1) έχουμε: $f(2) = -5$

Για τη μονοτονία έχουμε:

Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και γνωρίζουμε ότι: $f(0) = 1$ και $f(2) = -5$,

Συνεπώς: $0 < 2 \Rightarrow f(0) > f(2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Δ2. Θεωρώ τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) + x^2 + x$, $x \in [0,2]$.

Η h είναι

- Συνεχής στο $[0,2]$
- Παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, με $h'(x) = f'(x) + 2x + 1$
- $h(0) = f(0) = 1$<br>$h(2) = f(2) + 4 + 2 = -5 + 6 = 1$

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2) : h'(\xi) = 0$.

Δ3. • Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0) \cdot f(2) < 0$. Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,2) : f(x_0) = 0$.

• Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 2]$ ως παραγωγίσιμη.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, x_0)$ και $(x_0, 2)$ από υπόθεση.

Άρα από ΘΜΤ υπάρχουν:

$$x_1 \in (0, x_0) : f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{x_0}{0-1} = -x_0 \text{ και}$$

$$x_2 \in (x_0, 2) : f'(x_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2 - x_0}{-5} \Leftrightarrow \frac{5}{f'(x_2)} = -2 + x_0$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{5}{f'(x_2)} = -2$.

Δ4. $f(x) = x^2 + 1$, για $x \geq 0$.

Η εξίσωση γράφεται: $f(x) - 1 = x^2$, για $x \geq 0$.

Για $x \geq 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \leq 0$

και $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Άρα η μοναδική τιμή για την οποία ισχύει η ισότητα είναι για x=0.