ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28.

Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-12x+9$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[3,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$.

Παρουσιάζει στη θέση $x=1$, τοπικό μέγιστο το $f(1)=2$.

Παρουσιάζει στη θέση $x=3$, τοπικό ελάχιστο το $f(3)=-2$.

Β2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,2)$ έχει εξίσωση:

$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y-2=0\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=2$.

Β3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-12x+9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x^2-4x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}3(x-1)=6.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^2-2kx+4$. Ισχύει ότι:

$f'(2)=0 \Leftrightarrow 2^2-2k\cdot 2+4=0 \Leftrightarrow 4-4k+4=0 \Leftrightarrow -4k=-8 \Leftrightarrow k=2$.

Γ2. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+4x$ και $f'(x)=x^2-4x+4$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Γ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς $2022<2023 \Leftrightarrow f(2022)<f(2023)$.

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x ισούται με $f'(x)=x^2-4x+4$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=2x-4$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Το πρόσημο της f'' καθώς και η μονοτονία της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η ελάχιστη τιμή της f', δηλαδή η ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x ισούται με $f'(2)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παρατηρούμε ότι: $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\cdot\left(x^2+2x+5\right)'=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}>0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

Το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$.

Παρουσιάζει στη θέση $x=-1$, ολικό ελάχιστο το $f(-1)=2$.

Δ3. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=-1$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(x)\geq f(-1)\Leftrightarrow f(x)\geq 2$.

Δ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{f'(x)}-\frac{2}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-2\right)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+5-4}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}=\frac{0}{4}=0.$$